

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

**Varianta 1**

1. 70 de persoane participă la o excursie. La un moment dat se despart în două grupuri. În treimea primului grup sunt mai mulți decât în grupa a doua, unde numărul băieților este de șapte ori mai mare decât numărul fetelor. Câți au fost în fiecare grupă?

**Rezolvare**

Notăm  $x$  numărul persoanelor din prima grupă și cu  $y$  numărul persoanelor din grupa a doua. Atunci avem

$$x = 3k \text{ și } y = 8l \text{ unde } k, l \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 8l < k \leq 23 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow l \in \{1, 2\} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } l = 1 \text{ avem } y = 8, x = 62 \text{ dar } 62 \not\div 3 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } l = 2 \text{ avem } y = 16, x = 54 \text{ și } \frac{54}{3} = 18 > 16 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

2. Determinați acel număr rațional pozitiv cu care împărțind fracțiile  $\frac{10}{9}$  și  $\frac{8}{7}$  se obțin două numere naturale consecutive..

**Rezolvare**

$$\frac{10}{9} > \frac{8}{7} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Fie } \frac{n}{m} \text{ numărul rațional cu care împărțim cele două fracții. Atunci } \frac{10}{9} \cdot \frac{m}{n} = k \text{ și } \frac{8}{7} \cdot \frac{m}{n} = k + 1 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{7} \cdot \frac{m}{n} = \frac{10}{9} \cdot \frac{m}{n} + 1 \Rightarrow \frac{8}{7} \cdot \frac{m}{n} - \frac{10}{9} \cdot \frac{m}{n} = 1 \Rightarrow \frac{72m - 70m}{63n} = 1 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{63n} = 1 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{2}{63} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

3. a) Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale, care nu sunt divizibile cu 5 și pentru care  $a > b$ . Demonstrați că  $(a^4 - b^4) : 5$

- b) Dacă  $n$  este un număr natural nenul, determinați restul împărțirii prin 5 al numărului  $n^6 - n^2 + 1$ .

**Rezolvare**

$$\text{Fie } u(n) \text{ ultima cifră a numărului } n \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$a) \text{ dacă } a \text{ și } b \text{ nu sunt divizibile cu 5, atunci } u(a), u(b) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{rezultă } u(a^4), u(b^4) \in \{1, 6\} \text{ de unde } u(a^4 - b^4) \in \{0, 5\} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{deci } (a^4 - b^4) : 5 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

b)

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$u(n^6)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$u(n^6 - n^2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow (n^6 - n^2) : 5 \text{ deci restul împărțirii numărului } n^6 - n^2 + 1 \text{ prin 5 este 1} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

---

4. Determinați numerele naturale de două cifre pentru care restul împărțirii prin 13 este egal cu câtul împărțirii prin 11, iar restul împărțirii prin 11 este egal cu câtul împărțirii prin 13.

**Rezolvare**

Fie  $x$  numărul căutat. Avem  $x = 13a + b$  și  $x = 11b + a$  ..... 2 p  
Atunci  $13a + b = 11b + a$  și obținem  $6a = 5b$  ..... 3 p  
Deoarece  $a$  este divizibil cu 5 și  $a < 8$ , numărul căutat se obține pentru  $a = 5$  și  $b = 6$  ..... 3 p  
Deci  $x = 13 \cdot 5 + 6 = 11 \cdot 6 + 5 = 71$  ..... 1 p

5. Fie  $AOB$ ,  $BOC$  și  $BOC$ ,  $COD$  unghiuri adiacente două câte două. Suma măsurilor celor trei unghiuri este de  $150^\circ$  și  $3 \cdot m(AOB) = 2 \cdot m(BOC)$ ,  $7 \cdot m(BOC) = 3 \cdot m(COD)$ . Dacă  $OM$  și  $ON$  sunt bisectoarele unghiurilor  $BOC$  și  $COD$  calculați măsura unghiului  $MON$ .

**Rezolvare**

Fie  $x = m(AOB)$ ,  $y = m(BOC)$  și  $z = m(COD)$ . Atunci  $x + y + z = 150^\circ \Rightarrow x + z = 150^\circ - y$  ..... 1 p  
 $3x = 2y$ ,  $7y = 3z$ , deci  $9y = 3(x + z) \Rightarrow 3y = x + z$  ..... 2 p  
 $\Rightarrow 3y = 150^\circ - y$  ..... 1 p  
Obținem  $y = \frac{150^\circ}{4} = 37^\circ 30'$ ,  $x = \frac{2y}{3} = 25^\circ$ ,  $z = \frac{7y}{3} = 87^\circ 30'$  ..... 3 p  
Rezultă  $m(MON) = \frac{y + z}{2} = 62^\circ 30'$  ..... 2 p