

Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Definim șirul x_n $n \geq 1$ astfel încât $x_1 = 1 - \frac{1}{x}$ și $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

unde $x \in \mathbb{R} \setminus 0, 1$. Să se determine valoarea lui x pentru care

$$x_{2014} + x_{2015} + x_{2016} = \frac{3}{2}.$$

2. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Să se demonstreze că $\det(I_n + AB) \neq 0$.

3. Considerăm șirul a_n $n \in \mathbb{N}$, definit prin $a_{n+1}^2 = a_{n-1} \cdot a_n, \forall n \geq 1, a_0 = 1$ și $a_1 = 9$. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. Întindem pe masă un pachet de cărți și le amestecăm după o anumită regulă. Apoi amestecăm iar aplicând aceeași regulă (i. e. dacă la prima amestecare cartea de pe poziția i a ajuns pe poziția j , atunci la următoarea amestecare noua carte de pe poziția i ajunge pe poziția j). Arătați că dacă amestecăm aplicând de ori de câte ori aceeași regulă, la un anumit număr de pași, obținem ordinea inițială.

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Calculați: $\int \arcsin(\cos x) dx$, dacă $x \in [0, 2\pi]$

2. Dați exemplu de monoid comutativ cu 4 elemente astfel încât interiorul tablei operației să conțină elementele monoidului de câte 1, 2, 3 respectiv 10 ori.

3. Să se arate că nu există funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = x + F(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Cel puțin câte elemente trebuie să alegem arbitrar din grupul $\mathbb{Z}_{2016}, +$ astfel încât printre acestea să fie sigur trei elemente (nu neapărat distincte) ale căror sumă este 0?