

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluții și bareme

1. Calculați: $\int \arcsin(\cos x)dx$, dacă $x \in [0, 2\pi]$

Soluție

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, x \in [0, \pi] \\ x - \frac{3\pi}{2}, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \int \arcsin(\cos x)dx = \begin{cases} \frac{\pi x - x^2}{2} + c, x \in [0, \pi] \\ \frac{x^2 - 3\pi x}{2} + \pi^2 + c, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}, \text{ unde } c \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 4p$$

2. Dați exemplu de monoid comutativ cu 4 elemente astfel încât interiorul tablei operației să conțină elementele monoidului de câte 1, 2, 3 respectiv 10 ori.

Soluție

Fie $M = \{e, a, b, c\}$, unde e este elementul neutru, acesta fiind elementul care apare o singură dată (toate celelalte apar în produsele ex și xe). $\dots\dots\dots 1p$

Fie a elementul care apare de două ori, deci în produsele $ea = ae$ și b elementul care apare de 3 ori, deci în produsele $eb = be$ și încă un element pe diagonală, deoarece monoidul este comutativ. $\dots\dots\dots 2p$

Următorul tabel de operație corespunde cerinței:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	c
b	b	c	c	c
c	c	c	c	c

$\dots\dots\dots 2p$

Trebuie verificată asociativitatea. Dacă $\{e, c\} \cap \{x, y, z\} \neq \emptyset$, atunci evident $x(yz) = (xy)z$. Dacă $\{e, c\} \cap \{x, y, z\} = \emptyset$, avem de verificat cazurile $(aa)b = a(ab)$, $(ab)b = a(bb)$ și permutările acestora, care din comutativitate sunt echivalente cu acestea, toate acestea sunt adevărate, deci este asociativă. $\dots\dots\dots 2p$

3. Să se arate că nu există funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = x + F(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Din relația din enunț rezultă $F(0) = 0$ $\dots\dots\dots 1p$

Dacă $x \neq 0$, avem $f(x) = 1 + \frac{F(x)}{x}$ $\dots\dots\dots 1p$

Trecând la limită în această relație, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$ **(1)**. **1p**

Din teorema lui Lagrange $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = F'(0)$, deci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ **1p**

Pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0)$ **2p**

Relația **(1)** devine $f(0) = 1 + f(0)$ contradicție, deci nu există astfel de funcție. **1p**

4. Cel puțin câte elemente trebuie să alegem arbitrar din grupul $\mathbb{Z}_{2016}, +$ astfel încât printre acestea să fie sigur trei elemente (nu neapărat distincte) ale căror sumă este $\hat{0}$?

Soluție

Dacă alegem toate elementele impare, atunci oricare trei dintre acestea are suma impară, adică nu poate fi $2016k = \hat{0}$. Deci trebuie să alegem cel puțin 1009 de elemente. **2p**

În continuare vom arăta că acesta este suficient. Dacă $A = x_0, x_1, \dots, x_{1008}$ cu $x_0 < x_1 < \dots < x_{1008}$ este o submulțime arbitrară cu 1009 de elemente a mulțimii \mathbb{Z}_{2016} , atunci mulțimea

$B = x_0 + x_1, x_0 + x_2, \dots, x_0 + x_{1008}$ are 1008 elemente. **2p**

Mulțimea simetricelor elementelor mulțimii A , $A' = -x_0, -x_1, \dots, -x_{1008}$ conține 1009, deci $A' \cap B \neq \emptyset$.

Deci există $i, j \in 0, 1, \dots, 1008$ astfel încât $-x_i = x_0 + x_j$, deci $x_i + x_0 + x_j = \hat{0}$ **3p**