

Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluții și bareme

1. Definim șirul x_n $n \geq 1$ astfel încât $x_1 = 1 - \frac{1}{x}$ și $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Să se

determine valoarea lui x pentru care $x_{2014} + x_{2015} + x_{2016} = \frac{3}{2}$.

Soluție. Avem $x_2 = \frac{1}{1-x}, x_3 = x, x_4 = 1 - \frac{1}{x} = x_1$ **1p**

Prin inducție matematică avem $x_{3k+1} = x_1, x_{3k+2} = x_2, x_{3k} = x_3, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{2014} = x_1, x_{2015} = x_2, x_{2016} = x_3$ **3p**

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 - 2x^2 - 5x + 2 = 0$ **2p**

$\Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$ **1p**

2. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Să se demonstreze că $\det(I_n + AB) \neq 0$.

Soluție. $B = I_n - A \Rightarrow AB = A - A^2 = BA \Rightarrow ABA = A^2 - A^3 = O_n$ **3p**

De aici $AB^2 = ABAB = O_n$ **1p**

Folosim egalitatea $I_n = I_n - AB^2 = I_n - AB(I_n + AB)$ **1p**

Avem $\det \begin{bmatrix} I_n - AB & I_n + AB \end{bmatrix} = \det I_n - AB \det I_n + AB = 1$, deci $\det I_n + AB \neq 0$ **2p**

3. Considerăm șirul a_n $n \in \mathbb{N}$, definit prin $a_{n+1}^2 = a_{n-1} \cdot a_n, \forall n \geq 1, a_0 = 1$ și $a_1 = 9$. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Soluție. Din definiție $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ **1p**

Logaritmând în baza 3 $\Rightarrow 2 \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_{n-1} + \log_3 a_n \Rightarrow 2b_{n+1} = b_{n-1} + b_n$ și $b_0 = 0, b_1 = 2$ unde am notat $b_n = \log_3 a_n$ **2p**

Rezolvând ecuația caracteristică $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow b_n = \frac{4}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}$ **3p**

Deoarece $a_n = 3^{b_n}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{4}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3^{\frac{4}{3}}$ **1p**

Soluția2: Avem $a_2 = 3, a_3 = 3^{\frac{3}{2}}, a_4 = 3^{\frac{5}{4}}$. Presupunem $a_n = 3^{b_n} \Rightarrow 3^{2b_{n+1}} = 3^{b_n} 3^{b_{n-1}} \Rightarrow 2b_{n+1} = b_{n-1} + b_n$,
adică recurența din soluția1.

4. Întindem pe masă un pachet de cărți și le amestecăm după o anumită regulă. Apoi amestecăm iar aplicând aceeași regulă (i. e. dacă la prima amestecare cartea de pe poziția i a ajuns pe poziția j , atunci la următoarea amestecare noua carte de pe poziția i ajunge pe poziția j). Arătați că dacă amestecăm aplicând de ori de câte ori aceeași regulă, la un anumit număr de pași, obținem ordinea inițială.

Soluție. Dacă pachetul conține k cărți, atunci fiecare amestecare este o permutare $\sigma \in S_k$ a cărților. **2p**

Dacă elementul neutru e este ordinea inițială, atunci după n amestecări ordinea este σ^n **2p**

Dacă $\text{ord}(\sigma) = l$, atunci după l amestecări obținem ordinea inițială. **3p**

(Sau: există un număr finit de permutări de rang k , deci în șirul $e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^n, \dots$ există $\sigma^n = \sigma^{n+l}$, de unde $\sigma^l = e$)