

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 1

1. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 \leq 2ab$. Demonstrați că $a = b$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$. Demonstrați că numărul $3^x + 3^y$ se divide cu 41.

Rezolvare

a) avem $(a-b)^2 \geq 0$, deci $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 1 p

rezultă $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$ 2 p

b) fie $a^2 = 9^{x-2} = \frac{9^x}{9^2} = \left(\frac{3^x}{9}\right)^2$ și $b^2 = 9^{y+2} = 9^2 \cdot 9^y = (9 \cdot 3^y)^2$ 2 p

$2ab = 2 \cdot 3^x \cdot 3^y$ și din punctul a) rezultă $\frac{3^x}{9} = 9 \cdot 3^y \Rightarrow 3^x = 81 \cdot 3^y$ 2 p

$\Rightarrow 3^x + 3^y = 81 \cdot 3^y + 3^y = 3^y(81+1) = 2 \cdot 41 \cdot 3^y$ 1 p

deci $3^x + 3^y$ se divide cu 41 1 p

2. Demonstrați că, dacă $x - 7y + 3 = 0$ și $x \in [-3; 4]$, atunci:

$$E(x, y) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Rezolvare

Din $x - 7y + 3 = 0$ avem $x = 7y - 3$ 1 p

$E(x, y) = \sqrt{(7y-3+3)^2 + y^2} + \sqrt{(7y-3-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{50y^2} + \sqrt{50(y-1)^2}$ 3 p

$x \in [-3; 4] \Rightarrow y \in [0; 1]$ 3 p

Deci $E(x, y) = 5y\sqrt{2} + 5(1-y)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ 2 p

3. Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paralelipiped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralelipedului sunt exprimate cu același număr?

Rezolvare

Notăm cu a respectiv b lungimea celor două muchii aparținând vârfului cu o muchie de 6 cm.

Atunci $A_f = 2(6a + ab + 6b)$ și $V = 6ab$ 2 p

Avem $6ab = 2(6a + ab + 6b)$ adică $6a - 2ab + 6b = 0$ 2 p

$\Rightarrow (a-3)(b-3) = 9$ de unde 2 p

$a = 4$ și $b = 12$ sau $a = 6$ și $b = 6$ 2 p

A doua soluție nu satisface condițiile problemei, deci $a + b = 16$ 1 p

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei BD .

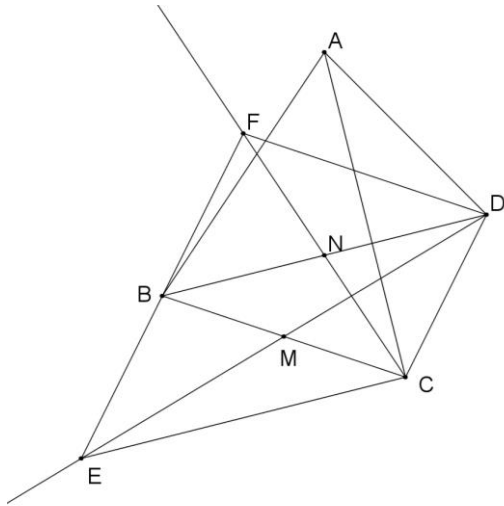
Pe semidreapta (DM) alegem punctul E astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta (CN) alegem punctul F astfel încât $CF = 2CN$

a) Demonstrați că punctele F, B, E sunt coliniare;

b) Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Rezolvare



- Desen 1 p
- a) BC și DE se înjumătățesc $\Rightarrow BECD$ este paralelogram $\Rightarrow CD \parallel EB$ și $(CD) \equiv (EB)$ 2 p
- Analog $CD \parallel FB$ și $(CD) \equiv (FB)$ 1 p
- $\Rightarrow EB = BF$ deci E, B, F sunt coliniare 1 p
- b) $AB \perp CD$, $CD \parallel EF \Rightarrow AB \perp EF$ (1) 1 p
- $(CD) \equiv (EB)$, $(CD) \equiv (FB) \Rightarrow (EB) \equiv (FB)$ (2) 1 p
- (1), (2) $\Rightarrow AB$ este mediatoarea segmentului EF deci triunghiul AEF este isoscel 2 p

5. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP . Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, iar N mijlocul segmentului $[DM]$. Arătați că $PN \perp DM$ dacă și numai dacă $DM \perp MC$.

Rezolvare

- Desen 1 p
- $PN \perp DM \Rightarrow AN \perp DM$, dar $AN \parallel MC$ deci $MC \perp DM$ 4 p
- $DM \perp MC$ } $\Rightarrow AN \perp DM$, dar $PA \perp (ABC)$ deci $PN \perp DM$ 4 p
- $AN \parallel MC$ }