

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 2

1. Avem 3 cutii cu bile: în prima 3 bile galbene, în a doua 3 bile verzi, iar în a treia 3 bile albastre. Din prima cutie scoatem 3 bile, dintre care o bilă punem într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. În continuare scoatem 3 bile din cea de a doua cutie, și la fel punem o bilă într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. Continuăm procedeul cu cutia a treia, apoi începem din nou. Cum putem obține ca în final să avem 3 bile albastre în prima, 3 bile galbene în a doua, respectiv 3 bile verzi în a treia cutie?

Rezolvare

Pașii sunt ilustrați în tabelul de mai jos:

Pași	Cutia I			Cutia II			Cutia III		
	galben	verde	albastru	galben	verde	albastru	galben	verde	albastru
	3	–	–	–	3	–	–	–	3
1.	–	–	–	2	3	–	1	–	3
2.	–	1	–	2	–	–	1	2	3
3.	–	1	2	2	–	1	1	2	–
4.	–	–	–	2	1	2	1	2	1
5.	–	–	1	2	–	–	1	3	2
6.	–	–	3	3	–	–	–	3	–

Fiecare pas 1,5 puncte **9 p**

2. Să se determine acele numere raționale pozitive, care satisfac simultan următoarele condiții:

a) $a + b + c = 77$;
b) $\frac{(a+4)^2 + 4}{8} = \frac{(b+6)^2 + 9}{18} = \frac{(c+12)^2 + 36}{72}$.

Rezolvare

$$\frac{(a+4)^2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{(b+6)^2}{18} + \frac{9}{18} = \frac{(c+12)^2}{72} + \frac{36}{72} \dots\dots\dots \mathbf{1\ p}$$

$$\text{Scădem } \frac{1}{2} \text{ din fiecare membru } \Rightarrow \frac{(a+4)^2}{8} = \frac{(b+6)^2}{18} = \frac{(c+12)^2}{72} \dots\dots\dots \mathbf{1\ p}$$

$$\text{Înmulțim cu 2 } \Rightarrow \frac{(a+4)^2}{4} = \frac{(b+6)^2}{9} = \frac{(c+12)^2}{36} \dots\dots\dots \mathbf{1\ p}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+6}{3}\right)^2 = \left(\frac{c+12}{6}\right)^2 \Rightarrow \frac{a+4}{2} = \frac{b+6}{3} = \frac{c+12}{6} \Rightarrow \frac{a}{2} + 2 = \frac{b}{3} + 2 = \frac{c}{6} + 2 \dots\dots\dots \mathbf{2\ p}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{a+b+c}{2+3+6} = \frac{77}{11} = 7 \dots\dots\dots \mathbf{2\ p}$$

$$\text{Obținem: } a = 14, b = 21 \text{ és } c = 42 \dots\dots\dots \mathbf{1\ p}$$

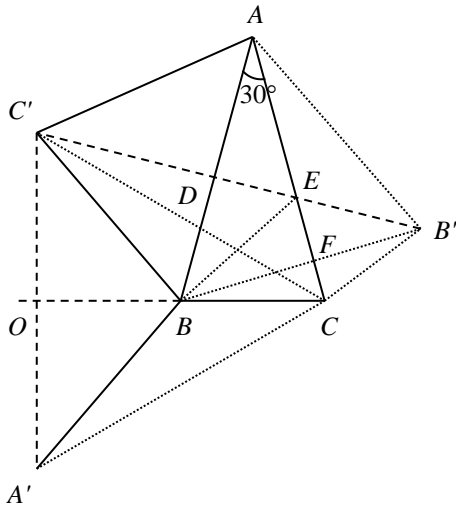
$$\text{Pentru } l = 2 \text{ avem } y = 16, x = 54 \text{ și } \frac{54}{3} = 18 > 16 \dots\dots\dots \mathbf{1\ p}$$

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

3. În triunghiul ABC $m(\angle A) = 30^\circ$ și $[AB] \equiv [AC]$. Fie B' simetricul punctului B față de dreapta AC , C' simetricul punctului B' față de dreapta AB , iar A' simetricul punctului C' față de dreapta BC . Fie $AC \cap B'C' = \{E\}$. Să se demonstreze, că:

- triunghiurile ABB' și ABC' sunt echilaterale și congruente;
- ACC' și $A'BC'$ sunt triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente;
- triunghiul $A'C'C$ este echilateral;
- A' , B și E sunt puncte coliniare;
- A' , C și B' sunt puncte coliniare.

Rezolvare



- a) Fie $BB' \cap AC = \{D\}$, $B'C' \cap AB = \{D\}$ și $A'C' \cap BC = \{O\}$ (figura) 1 p
 $ABF \triangle \equiv AB'F \triangle \Rightarrow m(\angle BAB') = 60^\circ$ și $[AB] \equiv [AB'] \Rightarrow ABB' \triangle$ isoscel 2 p
 AB este mediatoarea lui $(B'C')$ $\Rightarrow [AC'] \equiv [AB']$ și $[BC'] \equiv [BB'] \Rightarrow ABC' \triangle$ isoscel 2 p
 $ABB' \triangle \equiv ABC' \triangle$ 1 p
- b) $m(\angle CAC') = 90^\circ$ și $[AC] \equiv [AC'] \Rightarrow ACC'$ este triunghi dreptunghic isoscel 1 p
 $m(\angle ABC) = 75^\circ$ și $m(\angle ABC') = 60^\circ \Rightarrow m(\angle OBC') = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ \Rightarrow m(\angle A'BC') = 90^\circ$ 2 p
 $[A'B] \equiv [C'B] \Rightarrow A'BC'$ este triunghi dreptunghic isoscel 1 p
 $[AC'] \equiv [C'B] \Rightarrow ACC' \triangle \equiv A'BC' \triangle$ 1 p
- c) $m(\angle ACC') = 45^\circ$ și $m(\angle ACB) = 75^\circ \Rightarrow m(\angle OCC') = 30^\circ$ 1 p
 $m(\angle A'CO) = m(\angle C'CO) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle A'CC') = 60^\circ$, dar $[CC'] \equiv [CA'] \Rightarrow A'C'C$ triunghi echilateral 2 p
- d) E este ortocentru în triunghiul echilateral $ABB' \Rightarrow (BE$ bisectoare $\Rightarrow m(\angle ABE) = 30^\circ$ 1 p
 $m(\angle A'BE) = m(\angle A'BC') + m(\angle C'BA) + m(\angle ABE) = 90^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ 2 p
Punctele A' , B și E sunt coliniare 0,5 p
- e) $m(\angle A'CB') = m(\angle A'CC') + m(\angle C'CA) + m(\angle ACB') = 60^\circ + 45^\circ + 75^\circ = 180^\circ$ 1 p
Punctele A' , C și B' sunt coliniare 0,5 p

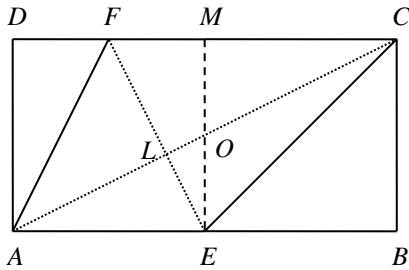
Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

4. În dreptunghiul $ABCD$ $AB = 2 \cdot BC$, E este mijlocul segmentului $[AB]$, $F \in [DC]$ astfel ca $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{3}$.

Se știe că $AC = 20$ cm.

- Arătați, că $AC \perp EF$.
- Calculați aria patrulaterului $AECF$.
- Cât este aria dreptunghiului $ABCD$?

Rezolvare



- a) Fie M mijlocul lui $[DC] \Rightarrow F$ mijlocul lui $[DM]$. $AC \cap ME = \{O\} \Rightarrow O$ mijlocul lui $[ME]$.
Fie $FE \cap AC = \{L\}$ (figura) 1 p
 $AEO_{\Delta} \equiv EMF_{\Delta}$ (cazul c-c) 1 p
 $\Rightarrow EAL \equiv LEO$, de $m(\angle LEO) + m(\angle AEL) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle EAL) + m(\angle AEL) = 90^\circ$ 1 p
 $m(\angle ALE) = 90^\circ \Rightarrow AC \perp EF$ 1 p
- b) $A_{AECF} = A_{AEF} + A_{CEF} = \frac{EF \cdot AL}{2} + \frac{EF \cdot CL}{2} = \frac{EF}{2} \cdot (AL + CL) = \frac{EF \cdot AC}{2}$ 1,5 p
 $AC = 20$ cm, $AO = \frac{AC}{2}$ și $EF = AO \Rightarrow EF = 10$ cm 1 p
Deci $A_{AECF} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100$ cm² 0,5 p
- c) $A_{ADF} = \frac{1}{8} A_{ABCD}$ és $A_{BEC} = \frac{1}{4} A_{ABCD} \Rightarrow A_{ADF} + A_{BEC} = \frac{3}{8} A_{ABCD} \Rightarrow A_{AECF} = \frac{5}{8} A_{ABCD}$ 1 p
 $A_{ABCD} = \frac{8}{5} A_{AECF} = \frac{8}{5} \cdot 100 = \frac{800}{5} = 160$ cm² 1 p