

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 1

1. Cinci frați au împreună 79 ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta celui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei frați este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului. Aflați vârstele celor 5 frați.
2. Să se demonstreze că: $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Rezolvați ecuația: $\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \dots + \frac{x+98}{99} + \frac{x+99}{100} = 2^5 \cdot 3$
4. Fie ABC un triunghi echilateral și fie $D \in BC$ astfel încât $(DC) \equiv (BC)$, respectiv $E \in AC$ astfel încât $(AE) \equiv (AC)$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$ arătați că:
a) $AB = 3AF$
b) DAF este triunghi dreptunghic.
5. Fie ABCD un pătrat în care s-a notat cu O intersecția diagonalelor. Construim pătratul OEFG congruent cu pătratul ABCD astfel încât $B \in (AE)$
a) Demonstrați că punctele B, C, G sunt coliniare!
b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului BEO.
c) Dacă $OE \cap BC = \{K\}$ arătați că $CG \cdot KG = OE \cdot KE$.

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 2

1. Avem 3 cutii cu bile: în prima 3 bile galbene, în a doua 3 bile verzi, iar în a treia 3 bile albastre. Din prima cutie scoatem 3 bile, dintre care o bilă punem într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. În continuare scoatem 3 bile din cea de a doua cutie, și la fel punem o bilă într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. Continuăm procedeul cu cutia a treia, apoi începem din nou. Cum putem obține ca în final să avem 3 bile albastre în prima, 3 bile galbene în a doua, respectiv 3 bile verzi în a treia cutie?
2. Să se determine acele numere raționale pozitive, care satisfac simultan următoarele condiții:
(i) $a + b + c = 77$;
(ii) $\frac{(a+4)^2 + 4}{8} = \frac{(b+6)^2 + 9}{18} = \frac{(c+12)^2 + 36}{72}$.
3. În triunghiul ABC $m(A) = 30^\circ$ și $[AB] \equiv [AC]$. Fie B' simetricul punctului B față de dreapta AC, C' simetricul punctului B' față de dreapta AB, iar A' simetricul punctului C' față de dreapta BC. Fie $AC \cap B'C' = \{E\}$. Să se demonstreze, că:
a) triunghiurile ABB' și ABC' sunt echilaterale și congruente;
b) ACC' și $A'BC'$ sunt triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente;
c) triunghiul $A'C'C$ este echilateral;
d) A' , B și E sunt puncte coliniare;
e) A' , C și B' sunt puncte coliniare.
4. În dreptunghiul ABCD $AB = 2 \cdot BC$, E este mijlocul segmentului $[AB]$, $F \in [DC]$ astfel ca $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{3}$. Se știe că $AC = 20$ cm.
a) Arătați, că $AC \perp EF$.
b) Calculați aria patrulaterului AECF.
c) Cât este aria dreptunghiului ABCD?