

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 2

1. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n
- a) numărul $N = 7^n \cdot 9^n + 21^{n+1} \cdot 3^n - 9 \cdot 63^n$ este divizibil cu 13;
- b) numărul $a = 8^n \cdot 5^{3n+1} + 1$ nu este prim.

Rezolvare

a) $N = 7^n \cdot 9^n + 21^{n+1} \cdot 3^n - 9 \cdot 63^n = 7^n \cdot 3^{2n} + 3^{n+1} \cdot 7^{n+1} \cdot 3^n - 3^2 \cdot 7^n \cdot 3^{2n} = \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
 $= 7^n \cdot 3^{2n} (1 + 3 \cdot 7 - 3^2) = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
 $= 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 13 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

b) $a = 8^n \cdot 5^{3n+1} + 1 = 2^{3n} \cdot 5^{3n} \cdot 5 + 1 = \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $= 10^{3n} \cdot 5 + 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 \Rightarrow suma cifrelor lui a este 6 $\Rightarrow a:3$ deci a nu este prim $\dots\dots\dots 1 \text{ p}$

2. Aflați numerele naturale a și b știind că $[a,b]$ este de 15 ori mai mare decât (a,b) și $5a + 3b = 150$.
 Am notat cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Rezolvare

$5a + 3b = 150 \Rightarrow a:3, b:5 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
 Fie $a = 3l$ és $b = 5k$, atunci $\Rightarrow l + k = 10 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
 Se obține două soluții:
 $a = 3, b = 45$ și $a = 15, b = 25 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

3. Determinați numerele prime a, b, c pentru care are loc egalitatea $2a + 3b + 6c + 6c^2 = 348$!

Rezolvare

$2a + 3b + 6c + 6c^2 = 348 \Rightarrow b = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
 Înlocuind, se obține $2a + 6c + 6c^2 = 342 \Rightarrow a + 3c + 3c^2 = 171 \Rightarrow a = 3 \dots\dots\dots 2,5 \text{ p}$
 Înlocuind, se obține $\Rightarrow 3c + 3c^2 = 168 \Rightarrow c + c^2 = 56 \dots\dots\dots 2,5 \text{ p}$
 $\Rightarrow c(1 + c) = 56 \Rightarrow c = 7 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

4. Un număr natural de trei cifre format din trei cifre distincte este de cinci ori mai mare decât produsul cifrelor sale. Care este acest număr?

Rezolvare

Conform ipotezei $\overline{abc} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c$. Dacă una dintre cifrele a, b, c ar fi par, atunci $c = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
 Ar rezulta $\overline{ab0} = 0$. $\Rightarrow a, b, c$ sunt cifre impare, deci $c = 5 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
 $\overline{ab5} = 25 \cdot ab \Rightarrow \overline{ab5}:25 \Rightarrow b = 7 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$
 $\overline{a75} = 175 \cdot a \Rightarrow a = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

5. În jurul unui punct O se construiesc n unghiuri, primul având măsura x° , al doilea $(2x)^\circ$, al treilea $(3x)^\circ$, și așa mai departe, al n -lea având măsura 120° ($n, x \in \mathbb{N}^*$)
- a) Determinați numărul unghiurilor construite în jurul punctului O ;
b) Calculați măsura penultimului unghi construit.

Rezolvare

a) $x + 2x + 3x + \dots + nx = 360$ és $nx = 120$ 2 p

$x(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 360 \Rightarrow x \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 360$ 2 p

$\Rightarrow \frac{120 \cdot (n+1)}{2} = 360 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$ 3 p

b) $x = 24 \Rightarrow$ măsura penultimului unghi este 96° 2 p