

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a IX-a

SUBIECTE:

1. a) Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate dacă și numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$
b) În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN . Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.
2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ numere reale. Să se determine minimul expresiei
$$E(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 2a^n b^n$. Să se arate că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional.
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x + d(y) = 6,5 \\ y + d(x) = 2,1 \end{cases}$$

unde $d(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a IX-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

1. a) Fie G, G' centrele de greutate ale celor două triunghiuri și O un punct din plan.

Avem: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$, (2 p)

$G' = G \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$,
 $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, (2 p)

b) $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BM}) = \vec{0}$, (3 p)

2. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, avem $|x-a| + |x-b| \geq b-a$, cu egalitate pentru $x \in [a, b]$, (1)

..... (2 p)

i) Dacă $n = 2k$, folosind (1) obținem:

$$|x-a_1| + |x-a_{2k}| \geq a_{2k} - a_1, |x-a_2| + |x-a_{2k-1}| \geq a_{2k-1} - a_2, \text{ ș.a.m.d.}$$

Se obține $\min(E(x)) = a_{2k} + a_{2k-1} + \dots + a_{k+1} - a_k - a_{k-1} - \dots - a_1$, atins pentru $x \in [a_k, a_{k+1}]$,

..... (2 p)

ii) Dacă $n = 2k+1$, folosind (1) avem: $E(x) \geq a_{2k+1} + a_{2k} + \dots + a_{k+2} - a_k - a_{k-1} - \dots - a_1 + |x - a_{k+1}|$ și

$\min(E(x)) = a_{2k+1} + a_{2k} + \dots + a_{k+2} - a_k - a_{k-1} - \dots - a_1$, atins pentru $x = a_{k+1}$, (3 p)

Obs. $a_{k+1} \in [a_k, a_{k+2}]$

3. Ridicând la pătrat relația din enunț, obținem:

$$a^{4n+2} + b^{4n+2} + 2a^{2n+1}b^{2n+1} = 4a^{2n}b^{2n}, (1), \dots (2 p)$$

Prelucrând (1), găsim:

$$a^{4n+2} + b^{4n+2} - 2a^{2n+1}b^{2n+1} = 4a^{2n}b^{2n} - 4a^{2n+1}b^{2n+1}, (a^{2n+1} - b^{2n+1})^2 = 4a^{2n}b^{2n}(1-ab), \dots (3 p)$$

Dacă $ab = 0$, cerința este îndeplinită, (1 p)

Pentru $ab \neq 0$, $1-ab = \left(\frac{a^{2n+1} - b^{2n+1}}{2a^n b^n}\right)^2 = q^2$, $q \in \mathbb{Q}$, (1 p)

4. Se disding cazurile

i) $\{x\}, \{y\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, sistemul devine: $\begin{cases} x + \{y\} = 6,5 \\ y + \{x\} = 2,1 \end{cases}$

Prin scăderea celor două ecuații obținem $[x] - [y] = 4,4$, ecuația nu are soluții, (2 p)

ii) $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\{y\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, sistemul devine: $\begin{cases} x + 1 - \{y\} = 6,5 \\ y + \{x\} = 2,1 \end{cases}$.

Prin adunarea celor două ecuații obținem $[x] + [y] + 2\{x\} = 7,6$.

Rezultă: $\{x\} = 0,3$, $y = 1,8$, $x = 6,3$, (2 p)

iii) $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\{y\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, sistemul devine: $\begin{cases} x + \{y\} = 6,5 \\ y + 1 - \{x\} = 2,1 \end{cases}$.

Prin adunarea celor două ecuații obținem $[x] + [y] + 2\{y\} = 7,6$.

Rezultă: $\{y\} = 0,3$, $x = 6,2$, contradicție cu $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, ecuația nu are soluții, (2 p)

iv) $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\{y\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, sistemul devine:
$$\begin{cases} x + 1 - \{y\} = 6,5 \\ y + 1 - \{x\} = 2,1 \end{cases}$$

Prin adunarea celor două ecuații obținem $[x] + [y] = 6,6$, ecuația nu are soluții, (1 p)

Soluția sistemului este:
$$\begin{cases} x = 6,3 \\ y = 1,8 \end{cases}$$

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.