

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a X-a

SUBIECTE:

1. Se considera numerele a, b, c, d astfel încât $a > c > b > 0$ și $ab = cd$.
Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a^x + b^x \geq c^x + d^x$.
2. Să se rezolve ecuația $(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}$.
G.M. 6-7-8/2014
3. Se consideră numerele complexe a, b, c distincte două câte două și de module egale astfel încât
 $|a - b| \cdot (a + b) + |b - c| \cdot (b + c) + |c - a| \cdot (c + a) = 0$
Demonstrați că a, b, c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.
4. Determinați numerele $a, b, c > 0$ cu proprietatea că
$$a^{\log_3 a} \cdot b + b^{\log_3 b} \cdot c + c^{\log_3 c} \cdot a = \sqrt[4]{27}.$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a X-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

1. $a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x \geq 0$1 p

$c^x \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1 - \left(\frac{a \cdot b}{c \cdot c}\right)^x \right] \geq 0$1 p

$\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right) \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^x - 1$ și $1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x$ au același semn.....3 p

Cum $\frac{a}{c} > 1$ și $\frac{b}{c} < 1$ se consideră cazurile $x \geq 0$ și $x < 0$ și

problema este rezolvată..... 2p

2. Ecuația se scrie $\log_5(3^x + 2) + 2 = 5^{\log_3(5^x - 2)}$1p

Notăm $\log_5(3^x + 2) = a$, $\log_3(5^x - 2) = b$ și obținem sistemul de ecuații

$3^x + 2 = 5^a$, $3^b + 2 = 5^x$, $3^a + 2 = 5^b$2p

Dacă $x > a \Rightarrow 3^x + 2 > 3^a + 2 \Rightarrow 5^a > 5^b \Rightarrow a > b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^a + 2 > 3^b + 2 \Rightarrow 5^b > 5^x \Rightarrow b > x$ contradicție

Si analog dacă $x < a$2p

Se obține $x = a$ și analog $x = b$, de unde $3^x + 2 = 5^x$

Cu soluție unică $x = 1$ 2p

3. Relația din ipoteză se scrie $:(a + b + c)(|a - b| + |b - c| + |c - a|) - (c \cdot |a - b| + a \cdot |b - c| + b \cdot |c - a|) = 0$4p

Împărțind prin $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ se obține $Z_H - Z_I = 0$1p

Atunci $I = H \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral.....2p

4. Notăm:

$\log_3 a = x, \log_3 b = y, \log_3 c = z \Rightarrow 3^{x^2+y} + 3^{y^2+z} + 3^{z^2+x} = \sqrt[4]{27}$1p

Cu inegalitatea mediilor $\sqrt[4]{27} \geq 3^{\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}}}$2p

Obținem $\frac{3}{4} \geq \frac{3+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{3}$1p

De unde se obține $(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2 \leq 0 \Rightarrow$

$x = y = z = -\frac{1}{2}$2p

Finalizarea $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.