

**Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală**  
**15 februarie 2015-PITEȘTI**  
**Clasa a XI-a**

**SUBIECTE:**

**Subiectul 1.** Fie matricile  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$  a.î.  $A^3 = -BCD$ ,  $B^3 = -CDA$ ,  $C^3 = -DAB$ ,  $D^3 = -ABC$

a) Să se arate că  $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$

b) Să se dea un exemplu de matrici  $A, B, C, D$  care verifică simultan condițiile din ipoteză

**Subiectul 2.** Să se arate că dacă șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  verifică relația :

$(n+2)x_{n+2} - (n+3)x_{n+1} + x_n = 0$ ,  $\forall n \geq 0$ , atunci el este convergent și calculați limita lui.

**Subiectul 3.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = a.A^3 + x.A^2 + (a-x).A$

Să se arate că  $a \cdot \det B \geq 0$ ,  $\forall a, x \in \mathbb{R}$

**Subiectul 4.** Fie  $A$  o matrice de ordinul doi cu elemente reale și  $A^t$  matricea transpusă. Știind

că  $\det(A + A^t) = 8$  și  $\det(A + 2A^t) = 27$ . Să se calculeze  $\det A$

G.M. nr 11 / 2014

**Notă:**

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

**Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală**  
**15 februarie 2015-PITEȘTI**  
**Clasa a XI-a**

**BAREM de CORECTARE si NOTARE:**

**Subiectul 1.** a)  $A^4 = A^3A = (-BCD)A = B(-CDA) = BB^3 = B^4$  .....1p

$C^4 = CC^3 = C(-DAB) = (-CDA)B = B^3B = B^4$  .....1p

$D^4 = DD^3 = D(-ABC) = (-DAB)C = C^3C = C^4$  .....1p

Finalizare  $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$  .....1p

b)  $A, -A, iA, -iA$  ( $i^4=1$ ) și verificările .....3p

**Subiectul 2.** Relația se mai poate scrie :  $(n+2)(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 0$  .....1p

Notează  $y_n = x_{n+1} - x_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n+2} y_n$  .....1p

$y_n = \frac{1}{(n+1)!} y_0$  .....1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} (x_1 - x_0)$  .....1p

$x_n = x_0 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) (x_1 - x_0)$  .....1p

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $E_n \rightarrow e \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e - 1$  .....1p

Finalizare  $x_n \rightarrow x_0 + (e - 1)(x_1 - x_0)$  .....1p

**Subiectul 3.** Calculează  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = I_3$  .....2p

obține  $B = \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$  .....1p

$\det B = 2a(3x^2 - 3ax + a^2)$  .....1p

$a \det B = 2a^2(3x^2 - 3ax + a^2)$  .....1p

$3x^2 - 3ax + a^2 \geq 0$  ( $\Delta = -3a^2 \leq 0$ ) .....1p

Finalizare  $2a^2(3x^2 - 3ax + a^2) \geq 0$  .....1p

**Subiectul 4.**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$  .....1p

$\det(A + A^t) = 4ad - b^2 - 2bc - c^2$  .....1p

$A + 2A^t = \begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}$  .....1p

$\det(A + 2A^t) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2$  ..... 1p

$\begin{cases} 4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8 \\ 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27 \end{cases}$  .....1p

Finalizare  $ad - bc = 11$ , deci  $\det A = 11$  .....2p

**Notă:**

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.