

**Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală**  
**15 februarie 2015-PITEȘTI**  
**Clasa a VI-a**

**SUBIECTE:**

1. Fie  $a$  și  $b$  numere naturale mai mici decât 100,  $a < b$ . Aflați cele două numere știind că c.m.m.d.c. al lor este număr prim, de 15 ori mai mic decât c.m.m.m.c. al aceluiași numere.

2.a) Arătați că  $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}, n \in \mathbb{N}^*$ ;

b) Calculați suma  $s = \frac{7}{1 \cdot 4} + \frac{31}{4 \cdot 7} + \frac{73}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{9703}{97 \cdot 100}$ .

c) Demonstrați că  $\frac{1}{15} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{3}$

3. Se dau unghiurile neadiacente suplementare  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$ . Măsura suplementului  $\angle AOC$  reprezintă jumătate din măsura complementului  $\angle AOB$ .

a) Calculați  $m(\angle AOB)$ ;

b) Dacă  $[OD]$  este bisectoarea  $\angle AOB$  și  $[OE]$  este bisectoarea  $\angle AOC$ , calculați  $m(\angle DOE)$ ;

c) Dacă  $[OM]$  este o semidreaptă inclusă în exteriorul  $\angle AOC$ ,  $m(\angle AOM) = 90^\circ$  și  $[ON]$  este bisectoarea  $\angle COM$ , demonstrați că punctele  $B, O, N$  sunt coliniare.

4. Spunem despre o mulțime de numere naturale că are proprietatea  $P$  dacă orice element al ei are exact 4 divizori.

a) Scrieți mulțimea cu proprietatea  $P$  formată din cele mai mici patru numere naturale de trei cifre.

b) Fie  $A$  o mulțime cu proprietatea  $P$  astfel încât  $8 \in A$ . Arătați că, orice elemente ar avea mulțimea  $A$  suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2014.

(Gazeta Matematică nr.11/2014)

**Notă:**

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală

15 februarie 2015-PITEȘTI

Clasa a VI-a

**BAREM de CORECTARE și NOTARE:**

1. Dacă notăm  $(a, b) = p$ ,  $p = \text{nr. prim}$ , atunci  $a = p \cdot x$ ,  $b = p \cdot y$ ,  $(x, y) = 1$  și  $x < y$ . (1p)

$[a, b] = pxy$ . Din  $[a, b] = 15 \cdot (a, b) \Rightarrow pxy = 15p \Rightarrow x \cdot y = 15$ . (1p)

Deoarece  $(x, y) = 1$  și  $x < y$  rezultă  $x = 1, y = 15$  sau  $x = 3, y = 5$ . (1p)

Cazul I. Pentru  $x = 1, y = 15 \Rightarrow a = p, b = 15p$ ,  $p \in \{2, 3, 5\}$ , obținem soluțiile

$(a, b) \in \{(2, 30), (3, 45), (5, 75)\}$ . (2p)

Cazul II. Pentru  $x = 3, y = 5 \Rightarrow a = 3p, b = 5p$ ,  $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ , obținem

soluțiile  $(a, b) \in \{(6, 10), (9, 15), (15, 25), (21, 35), (33, 55), (39, 65), (51, 85), (57, 95)\}$  (2p)

$$2. a) \frac{3}{n(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{n(n+3)} = \frac{(n+3)}{n(n+3)} - \frac{n}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \quad (2p)$$

$$b) s = 1 + \frac{3}{1 \cdot 4} + 1 + \frac{3}{4 \cdot 7} + 1 + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + 1 + \frac{3}{97 \cdot 100} = \quad (1p)$$

$$= 33 + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} = 33 + \frac{99}{100} = 33 \frac{99}{100} \quad (1p)$$

$$c) \frac{1}{15} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} < 1 \quad (1p)$$

$$\frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} < \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{97 \cdot 100} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} < 1 \quad (1p)$$

$$\frac{3}{4^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{100^2} > \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \frac{3}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{3}{100 \cdot 103} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} = \frac{1}{4} - \frac{1}{103} = \frac{99}{412} > \frac{1}{5} \quad (1p)$$

$$3. a) m(\angle AOB) = 30^\circ \quad (2p)$$

$$b) m(\angle DOE) = 60^\circ \quad (2p)$$

$$c) \text{Demonstrează că } m(\angle BON) = 180^\circ \Rightarrow B, O, N \text{ coliniare.} \quad (3p)$$

$$4. a) M = \{106, 111, 115, 118\} \quad (2p)$$

b) Fie  $x \in A$  și  $x = d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot d_3^{\alpha_3} \cdot \dots$  descompunerea în factori primi. Deoarece  $x$  are 4 divizori avem relația  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots = 4$ . (1p)

$$\text{Cazul I. } \alpha_1 + 1 = 4 \quad \alpha_1 = 3$$

$$\alpha_2 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow x = d_1^3 = d^3 \quad (1p)$$

$$\alpha_3 + 1 = 1 \quad \alpha_3 = 0$$

.....

$$\text{Cazul II. } \alpha_1 + 1 = 2 \quad \alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow x = d_1 \cdot d_2 \quad (1p)$$

$$\alpha_3 + 1 = 1 \quad \alpha_3 = 0$$

.....

Notăm  $s(x)$  suma divizorilor nr.  $x \Rightarrow s(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Dacă  $x \in A$ ,  $x \neq 8 \Rightarrow x = d^3$ ,  $d$  nr. prim diferit de 2 sau  $x = d_1 \cdot d_2$  unde  $d_1, d_2$  sunt numere prime.

Pentru  $x = d^3 \Rightarrow s(x) = 1 + d + d^2 + d^3 = (1 + d)(1 + d^2) = \text{nr. par.} \quad (1p)$

Pentru  $x = d_1 \cdot d_2 \Rightarrow s(x) = 1 + d_1 + d_2 + d_1 \cdot d_2 = (1 + d_1)(1 + d_2) = \text{nr. par.}$

Suma divizorilor elementelor mulțimii  $A$  este nr. impar, deci este diferită de 2014.  $(1p)$

Observație: Dacă elevul precizează că  $x = d^3$  sau  $x = d_1 \cdot d_2$  unde  $d, d_1, d_2$  sunt numere prime și nu demonstrează, se acordă 1p.

### **Notă:**

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.