

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XII-a

SUBIECTE:

1. Să se calculeze $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015} dx, x > 0.$

2. Fie (G, \bullet) un grup cu elementul neutru e și H un subgrup propriu al lui G .

i) Dacă $a \in G \setminus H$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Demonstrați că $H \cap aH = \emptyset$.

ii) Dacă G este comutativ și $a \in G \setminus H$ satisface $a^2 = e$, atunci $K = H \cup aH$ este subgrup al lui G .

G.M. 1986

3. a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{4^x + 1}{3^x + 2^x} dx$

b) Se consideră numerele reale a și b și funcția continuă $f: R \rightarrow R$ cu proprietatea că

$$\int_{at}^{bt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx, \text{ oricare ar fi } t \in (0, 2). \text{ Să se arate că } af(a) = bf(b).$$

GM 10/2014

4. Fie $(A, +, \bullet)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x, (\forall) x \in A$. Să se arate că :

a) $x + x = 0, (\forall) x \in A$ și că A este inel comutativ;

b) dacă inelul nu are divizori ai lui zero, atunci el are cel mult două elemente.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa Locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XII-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

1. $I = \int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015} dx = \int \frac{2x+3}{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+2015} dx$ -----2p

$I = \int \frac{2x+3}{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+2015} dx = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2+2014} dx$ -----2p

$I = \int \frac{(x^2+3x+1)'}{(x^2+3x+1)^2+2014} dx$ -----2p

Finalizare -----1p

2. i.) -----3p

K nevidă -----1p ; K parte stabilă -----2p

Simetricul oricărui element din K este în K -----1p

3. a) Obținerea rezultatului $I = \frac{3 \ln 2}{2}$ prin orice metodă corectă -----4p

b) Dacă $a=b$, atunci egalitatea este evidentă. Dacă nu, atunci se

consideră funcției $g : (0;2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \int_{at}^{bt} f(x) dx$ -----1p

$g(t) \leq g(1) (\forall t \in (0;2))$, deci $t=1$ este punct de maxim global al lui g -----1p

Aplicarea teoremei lui Fermat și finalizare -----1p

4. a) i) $x+x=0 (\forall x \in A)$ -----2p

ii) A inel comutativ (se face trecerea $x \rightarrow x+y$ în egalitatea din enunț, se obține $xy = -yx (\forall x, y \in A)$ și se aplică i) -----2p

b) $xy(x+y) = x^2y + xy^2 = x^2y + x^2y = xy(x+y) = 0 (\forall x, y \in A)$ -----1p

$y=1 : x(x+1)=0 (\forall x \in A)$ și A n-are divizori ai lui zero, -----1p

deci $\text{card}(A) \leq 2$ -----1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

