

**INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, 27.02.2016  
Clasa a IX-a**

**1. (7p)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\{x\}^2 + 22\{x\} = 10x - 9,$$

unde prin  $\{a\}$  s-a notat partea fracționară a numărului real  $a$ .

*GM 12/2015*

**2. (7p)** Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale strict pozitive, astfel încât  $a^3 + b^3 + c^3 = ab + bc + ca$ , arătați că:

**(3p) a)**  $a + b + c \leq 3$ .

**(4p) b)**  $a^3 + b^3 + c^3 \leq 3$ .

*Alin Pop*

**3. (7p)** Arătați că șirul de numere reale strict pozitive  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este o progresie geometrică dacă și numai dacă  $a_1 a_2 \dots a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}, (\forall) n \geq 3$ .

\*\*\*

**4. (7p)** Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$  și  $G_1, G_2, G_3, G_4$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $BCD, ACD, ABD$ , respectiv  $ABC$ . Demonstrați că dreptele  $AG_1, BG_2, CG_3, DG_4$  sunt concurente.

\*\*\*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.

**Barem de corectare OLM Clasa a IX-a 2016**

1. Notăm  $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = b$  deci  $x = a + b$  și ecuația devine :

$$b^2 + 12b = 10a - 9 \dots\dots\dots (1p)$$

$$b \in [0,1), \text{ deci } 0 \leq 10a - 9 \leq 13, \text{ de unde } a \in \{1, 2\} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Pentru } a = 1 \text{ se obține } b = \sqrt{37} - 6, \text{ deci } x = \sqrt{37} - 5 \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Pentru } a = 2 \text{ se obține } b = \sqrt{47} - 6, \text{ deci } x = \sqrt{47} - 5 \dots\dots\dots (2p)$$

2. a) Presupunem  $a \leq b \leq c$ , deci  $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ . Folosind inegalitatea lui Cebâșev obținem:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \dots\dots\dots (1p)$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)(ab+ac+bc) = \frac{1}{3}(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \dots\dots\dots$$

(1p)

$$\text{Rezultă } a+b+c \leq 3 \dots\dots\dots (1p)$$

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent avem:

$$9 \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc) = 3(a^3 + b^3 + c^3) \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Rezultă } a^3 + b^3 + c^3 \leq 3 \dots\dots\dots (2p)$$

3. „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este progresie geometrică atunci:  $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = \dots = a_n a_1 \dots\dots\dots$

(2p)

$$\text{Dacă } P = a_1 a_2 \dots a_n, \text{ atunci } P^2 = \underbrace{(a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \dots (a_1 a_n)}_n = (a_1 a_n)^n \Rightarrow P = \sqrt[n]{(a_1 a_n)^n} \dots\dots\dots (2p)$$

„ $\Leftarrow$ ” Notăm  $\frac{a_2}{a_1} = r$  și  $P(n) : a_1, a_2, \dots, a_n$  în progresie geometrică de rație  $r \dots\dots\dots$

(1p)

Scriind egalitatea din enunț pentru  $n=3$  se obține  $a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$  sunt în progresie geometrică de rație  $r$ , deci  $P(3)$  este adevărată  $\dots\dots\dots (1p)$

Pentru  $n \geq 3$  presupunem  $P(n)$  adevărată, deci  $a_n = a_1 r^{n-1}$ . Împărțim egalitatea din ipoteză pentru  $n+1$  termeni la cea pentru  $n$  termeni și obținem  $a_{n+1} = a_n r = a_1 r^n$ , deci  $P(n+1)$  este adevărată. Astfel,  $P(n)$  este adevărată  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , deci  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este progresie geometrică  $\dots\dots\dots (1p)$

4.  $G$  este centrul de greutate al patrulaterului  $ABCD$ , deci  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \dots\dots\dots (2p)$

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_1} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \dots\dots\dots (1p)$$

Rezultă că vectorii  $\overrightarrow{GA}$  și  $\overrightarrow{GG_1}$  sunt coliniari, deci  $G \in G_1 A \dots\dots\dots (1p)$

Analog se arată că și celelalte drepte trec prin  $G$ , deci cele patru drepte sunt concurente ... (**1p**)