

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016

Clasa a V-a

1. (4p) a) Determinați cifrele a, b, c nenule, care îndeplinesc simultan condițiile:

$$(i) \overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cc}; (ii) \overline{ab} - \overline{ba} = c; (iii) (\overline{cc} - c - c) : c = c.$$

(3p) b) Determinați numărul \overline{ab} , care verifică egalitatea: $\overline{abcd} - 4 \cdot \overline{ab} - \overline{cd} = 2016$.

Liviu Cocariu-Ardelean

2. (7p) Se consideră numerele:

$$A = 0^1 + 1^0 + 2^3 + 3^2 + 4^5 + 5^4 + 349,$$

$$B = 2^{2000} \cdot \left[3^{10} : 3^7 - (5^4)^5 : 25^9 \right]^{15} + 16^{250} \cdot 8^{250} \cdot 4^{250} : 2^{235},$$

$$C = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015}.$$

Stabiliți care dintre numerele A, B și C sunt pătrate perfecte.

Felicia Brodețchi

3. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = k^2 + k, k < 8\}, B = \{y \in \mathbb{N} \mid (y+3) \cdot 2016^2 \leq 12^6 \cdot 7^2\}.$$

(4p) a) Determinați elementele mulțimiilor A și B .

(3p) b) Determinați toate submulțimile de câte două elemente ale mulțimii A , care sunt și submulțimi ale mulțimii B .

Diana Făgețan

4. Cinci prieteni participă la un concurs de matematică, unde au de rezolvat 4 probleme. Pentru o problemă rezolvată corect și complet se primesc 7 puncte. Pentru o problemă rezolvată aproape corect se primesc 6 sau 4 puncte, în funcție de cât de mult s-a apropiat elevul de soluția corectă. Pentru obținerea doar a unui rezultat corect, fără valorificarea sa ulterioară, se primesc 2 puncte, iar pentru o rezolvare greșită sau considerații nerelevante nu se primește niciun punct.

(3p) a) Dacă Alin a obținut exact 23 de puncte, arătați că a rezolvat corect cel puțin o problemă.

(4p) b) Dacă Bogdan și Daniel au obținut împreună 48 de puncte, iar Cristi și Emil au obținut împreună tot 48 de puncte, fiecare dintre ei având alt punctaj, arătați că cel puțin unul dintre ei a rezolvat corect cel puțin 3 probleme.

GM3/2015

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 2 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a V-a

1. a) Din (iii) $(\overline{cc} - c - c) : c = c \Rightarrow c = 9$ (1p)

Din (i) $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cc} \Rightarrow 11a + 11b = 99 \Rightarrow a + b = 9$ (1p)

Din (ii) $\overline{ab} - \overline{ba} = c \Rightarrow 9a - 9b = 9 \Rightarrow a - b = 1$ (1p)

Finalizare $a = 5$ și $b = 4$ (1p)

b) $\overline{abcd} - 4 \cdot \overline{ab} - \overline{cd} = 2016 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} - 4 \cdot \overline{ab} - \overline{cd} = 2016 \Leftrightarrow 96 \cdot \overline{ab} = 2016$ (2p)

Finalizare $\overline{ab} = 21$ (1p)

2. $A = 2016$ se află între 44^2 și 45^2 , deci nu este pătrat perfect (2p)

$B = 2^{2015} + 2^{2015} = 2^{2016} = (2^{1008})^2$ este pătrat perfect (2p)

$C = 2^{2016} - 1$ (2p)

C este precedentul lui $(2^{1008})^2$, deci nu este pătrat perfect (1p)

3. a) $A = \{2, 6, 12, 20, 30, 42, 56\}$ (1p)

După calcule se obține $y \leq 33$ (2p)

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 33\}$ (1p)

b) Submulțimile căutate sunt submulțimile de 2 elemente ale mulțimii $A \cap B = \{2, 6, 12, 20, 30\}$ (1p)

Deci, $\{2, 6\}; \{2, 12\}; \{2, 20\}; \{2, 30\}; \{6, 12\}; \{6, 20\}; \{6, 30\}; \{12, 20\}; \{12, 30\}; \{20, 30\}$ (2p)

4. a) Presupunem că Alin nu a rezolvat nici o problemă corect (1p)

Atunci punctajul obținut de Alin ar fi trebuit să fie un număr par (toate punctajele parțiale sunt numere pare) (1p)

Cum punctajul obținut de Alin este un număr impar, rezultă că a rezolvat corect cel puțin o problemă. (situații posibile: 7, 6, 6, 4 sau 7, 7, 7, 2) (1p)

b) Punctajul total al celor 4 copii este $48 + 48 = 96$ (*) (1p)

Presupunem că fiecare rezolvă corect cel mult două probleme. Deoarece punctajele sunt diferite, cele patru punctaje ar putea fi cel mult 7, 7, 6, 6; 7, 7, 6, 4; 7, 7, 6, 2; 7, 7, 4, 4. Astfel, suma lor ar fi cel mult 94 (2p)

Contradicție cu (*), deci, cel puțin unul dintre ei a rezolvat corect 3 probleme (1p)