

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a X-a

1. (7p) Se consideră numărul real $t = \frac{3 \sin x \sin y \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}$, $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Demonstrați că
- $$\log_{\sin x} t + \log_{\sin y} t + \log_{\sin z} t \geq 6.$$

Doriana Dorca

2. (7p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_3(x^6 + x^4) = \log_3 x \cdot \log_3 810$.

Petru Vlad

3. (7p) Numerele complexe z_1 și z_2 verifică relațiile $|z_1| = |z_2|$ și $3|z_1 + z_2| \geq |5z_1 + z_2|$. Demonstrați că $z_1 = z_2$.

GM6-7-8/2015

4. (7p) Determinați funcțiile injective $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, știind că

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = \dots = \frac{f(n)}{n}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a X-a

$$1. \frac{3}{\sin x + \sin y + \sin z} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x \sin y \sin z}} = (\sin x \sin y \sin z)^{-\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (2p)$$

$$t \leq (\sin x \sin y \sin z)^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (1p)$$

Folosind monotonia funcției logaritmice de bază subunitară și proprietățile logaritmilor

$$\text{avem } \log_{\sin x} t \geq \frac{2}{3} \log_{\sin x} (\sin x \sin y \sin z) = \frac{2}{3} (1 + \log_{\sin x} \sin y + \log_{\sin x} \sin z) \text{ și analoagele} \dots\dots\dots$$

(2p)

$$\log_{\sin x} \sin y + \log_{\sin y} \sin x \geq 2, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Prin însumare } \log_{\sin x} t + \log_{\sin y} t + \log_{\sin z} t \geq \frac{2}{3} (3 + 6) = 6 \dots\dots\dots (1p)$$

$$2. \text{ Pentru } x > 0 \text{ avem } \log_3 x^4 (x^2 + 1) = \log_3 x \cdot \log_3 (3^4 \cdot 10) \dots\dots\dots (1p)$$

$$4 \log_3 x + \log_3 (x^2 + 1) = 4 \log_3 x + \log_3 x \cdot \log_3 10, \log_3 (x^2 + 1) = \log_3 x \cdot \log_3 10 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Dacă } \log_3 x = a, \text{ atunci } x = 3^a \text{ și ecuația devine } \log_3 (3^{2a} + 1) = \log_3 10^a \dots\dots\dots (3p)$$

$$9^a + 1 = 10^a, \left(\frac{9}{10}\right)^a + \left(\frac{1}{10}\right)^a = 1 \text{ cu soluția unică } 1 \Rightarrow x = 3 \dots\dots\dots (2p)$$

$$3. \text{ Dacă } z_2 = 0 \text{ atunci } |z_1| = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ și verifică } 3|z_1 + z_2| \geq |5z_1 + z_2|, \text{ deci } z_1 = z_2 = 0 \dots\dots (1p)$$

$$\text{Dacă } z_2 \neq 0, \text{ prin împărțirea relațiilor cu } |z_2| \text{ se obține } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \text{ și } 3\left|\frac{z_1}{z_2} + 1\right| \geq \left|5\frac{z_1}{z_2} + 1\right| \dots\dots (1p)$$

$$\text{Pentru } \frac{z_1}{z_2} = z \text{ avem } |z_1| = 1, |3z + 3| \geq |5z + 1| \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Prin ridicare la pătrat se obține } (3z + 3)(3\bar{z} + 3) \geq (5z + 1)(5\bar{z} + 1) \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Folosind faptul că } |z| = 1 \text{ avem: } 18 + 9z + 9\bar{z} \geq 26 + 5z + 5\bar{z} \text{ sau } z + \bar{z} \geq 2 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Dacă } z = a + bi, a, b \in R, \text{ relația devine } a \geq 1 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Cum } |z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1, \text{ de unde } a = 1 \text{ și } b = 0, \text{ deci } z = 1 \Rightarrow z_1 = z_2 \dots\dots\dots (1p)$$

$$4. \text{ Din } f \text{ injectivă se obține că } \{1, 2, \dots, n\} = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\} \dots\dots\dots (3p)$$

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = \dots = \frac{f(n)}{n} = \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{1 + 2 + \dots + n} = 1 \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Rezultă că } f(n) = n \text{ pentru orice } n \in N^* \dots\dots\dots (2p)$$