



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

**Clasa a VII-a**

### SUBIECTUL 1

- a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b$  avem  $|a| + |b| \geq |a - b|$ .
- b) Demonstrați că oricare ar fi numărul real  $x$ ,  $|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+2016| \geq 1008^2$

### SUBIECTUL 2

Se dau numerele  $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2016}}$  și  $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$ .

- a) Calculați numărul  $a$ .
- b) Dacă  $c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1$ , arătați că numărul  $c$  este pătrat perfect.

### SUBIECTUL 3

Fie triunghiul isoscel  $ABC$  cu  $m(\angle BAC) = 120^\circ$ . În exteriorul lui se construiește triunghiul obtuzunghic isoscel  $ABE$  de bază  $[AB]$ . Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ ,  $F$  este simetricul lui  $M$  față de  $BC$ , iar  $AF \cap BC = \{P\}$ , se cere :

- a) Demonstrați că punctele  $P, M$  și  $E$  sunt coliniare.
- b) Știind că  $MP = a$  (cm), iar  $EM \cap AC = \{D\}$ , demonstrați că  $[AF] \equiv [MD]$ .

### SUBIECTUL 4

În pătratul  $ABCD$  se construiesc pătratele  $ALEP$  și  $BLIT$ , cu  $AL < BL$ , unde  $L \in (AB), T \in (BC)$ . Notăm  $PT \cap IL = \{N\}$  și fie  $M \in (PT)$ , astfel încât  $[PM] \equiv [MT]$ .

- a) Să se demonstreze că centrul de greutate  $G$  al  $\Delta PIT$  aparține dreptei  $BD$ .
- b) Dacă  $A_{PIE} = A_{MEI}$ , să se determine valoarea raportului dintre ariile pătratelor  $ALEP$  și  $ABCD$  și valoarea raportului  $\frac{IG}{AC}$ .

prof. Pîrvu Mihai

#### Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etape locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a VII-a

## Barem de corectare și notare

### SUBIECTUL 1

a) Oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|a - b| = |b - a|$ . .....1p

Relația  $|a| + |b| \geq |a - b|$  este simetrică în  $a$  și  $b$ , atunci este suficient doar cazul  $a \geq b \geq 0$  .....1p

În acest caz,  $a + b \geq a - b \Leftrightarrow |a| + |b| \geq |a - b|$  (\*) .....1p

b) Gruparea termenilor egal depărtați de capete permite aplicarea relației (\*). .....1p

Suma a câte 2 termeni este  $|x + 2017 - k| + |x + k| \geq 2017 - 2k, \forall k, k \in \{1, 2, 3, \dots, 1008\}$  .....1p

Calculul sumei  $1 + 2 + \dots + 1008 = \frac{1008 \cdot 1009}{2}$  .....1p

Finalizare,  $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2016| \geq 1008^2$  .....1p

### SUBIECTUL 2

a) Calculul numărului  $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2016}} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{3} + 3 + \dots + 3^{1007} \sqrt{3} + 3^{1008} = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})(1 + 3 + \dots + 3^{1007}) \quad \dots\dots\dots 2p$$

b) Calculul  $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016} = 3 \cdot (1 + 3^{1008}) \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1007}) \quad \dots\dots\dots 2p$

$$c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - 1 = 3^{1008} \quad \dots\dots\dots 2p; \quad \text{Finalizare, } c = (3^{504})^2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

### SUBIECTUL 3

a) Se demonstrează  $\triangle MNB \equiv \triangle FNB \Rightarrow [MB] \equiv [FB]$  și cum

$m(\angle ABC) = 30^\circ$ , atunci  $[MB] \equiv [FB] \equiv [MF]$ . .....1p

În  $\triangle ABF$ ,  $[AM] \equiv [BM] \equiv [FM] \Rightarrow m(\angle AFB) = 90^\circ$  și

$m(\angle BAF) = 30^\circ$ . .....1p

În  $\triangle ABP$ ,  $m(\angle ABP) = m(\angle BAP) = 30^\circ$  și cum

$[AM] \equiv [BM] \Rightarrow MP \perp AB$  (1) .....1p

În  $\triangle ABE$ ,  $[AE] \equiv [BE]$  și  $[AM] \equiv [BM] \Rightarrow EM \perp AB$  (2)

Din (1) și (2) rezultă  $E \in MP$ . .....1p

b) Cum  $m(\angle BAP) = 30^\circ$  și  $m(\angle PMA) = 90^\circ$  și

$MP = a$  (cm), atunci  $AP = 2a$  și apoi  $AF = 3a$ . .....1p

Se demonstrează în  $\triangle ACP$ ,  $PC = 4a$  și în  $\triangle CDP$ ,  $CP = DP = 4a$  .....1p

Se arată că  $AF = DM = 3a$ , adică  $[AF] \equiv [DM]$  .....1p

### SUBIECTUL 4

Dacă  $ALEP$  și  $BLIT$  sunt pătrate, unde  $L \in (AB)$  și  $AL < BL$ , atunci  $E \in (LI)$  și

cum  $ABCD$  este pătrat, atunci  $DP \parallel BT$ ,  $[DP] \equiv [BT]$ . (I). .....1p

Din (1) rezultă  $DPBT$  paralelogram și cum  $M \in (PT)$ ,  $[PM] \equiv [MT]$ . atunci

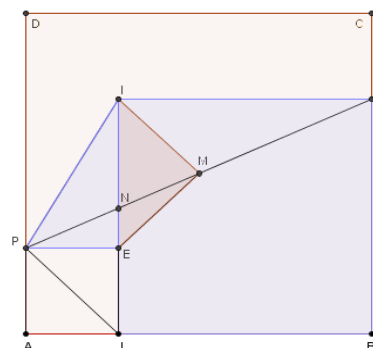
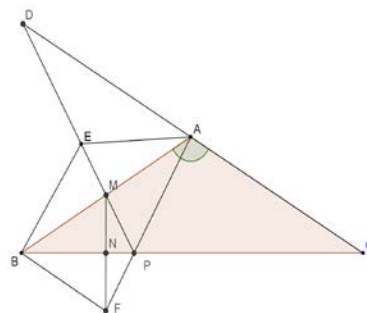
$M \in (BD)$ ,  $[DM] \equiv [MB]$ . .....1p

În  $ABCD$  și  $BLIT$  pătrate, cu  $L \in (AB)$ , și  $T \in (BC)$ . rezultă

$m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = m(\angle IBL) = m(\angle LBT) = 45^\circ \Rightarrow BD = BI$  și cum  $M \in (BD)$ ,  $[DM] \equiv [MB] \Rightarrow I \in (BD)$ . (2).

Din (2), cu ipoteza  $M \in (BD)$ ,  $[DM] \equiv [MB]$  și deoarece  $G \in (IM)$ ,  $\frac{GM}{GI} = \frac{1}{2} \Rightarrow I, G \in (BD)$ . .....1p

Demonstrează  $M \in (AC)$ ,  $[AM] \equiv [MC]$  și cum  $M \in (BD)$ ,  $[DM] \equiv [MB] \Rightarrow E, M \in (AC)$ , deci  $ME = AC$ . (3) .....1p



Notăm lungimile  $AL = a$  și  $LB = b$ . Din  $ABCD$  pătrat , cum  $AD \parallel LI \parallel BC$  ,  $IM = BD$  și  $ME = AC$ , demonstrăm că, oricare ar fi poziția punctului  $L \in (AB)$ ,  $\triangle MIE$  este dreptunghic isoscel cu ipotenuza  $IE = b - a$  și  $\triangle PIE$  este dreptunghic cu catetele  $EP = a$  și  $IE = b - a$ . .....1p

Ipoteza  $A_{PIE} = A_{MEI} \Leftrightarrow d(M, IL) = a \Rightarrow d(M, AD) = 2a \Rightarrow a + b = 4a \Rightarrow b = 3a$  .....1p

In final, valoarea raportului dintre ariile pătratelor  $ALEP$  și  $ABCD$  este egală cu  $\frac{1}{16}$ .

$G \in IM, \frac{IG}{IM} = \frac{2}{3}, \frac{IM}{BD} = \frac{1}{4}, [BD] \equiv [AC] \Rightarrow \frac{IG}{AC} = \frac{1}{6}$  .....1p

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .