



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A, B \in M_n(C)$ simetrice și $C = AB - BA$. Să se arate că:

- a) Pentru $n = 2k + 1$, $\text{Det} C = 0$, unde $k \in \mathbf{N}$.
- b) Dacă $P(x) = \text{Det}(C + xI_n)$, atunci are loc relația: $P(x) = (-1)^n P(-x)$,
(o matrice egală cu transpusa sa se numește matrice simetrică)

prof. Adriana Gurgui

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(R)$ cu proprietatea că $\text{Tr}(A^2 B^2) = (\text{Tr}(AB))^2$. Să se arate că
 $\det(AB - BA) = 2 \cdot \det A \cdot \det B$. (S-a notat cu $\text{Tr}(X)$ urma matricei X)

prof. Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 3

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\{ \sqrt{n^2 + 1} \right\} + \left\{ \sqrt{n^2 - 1} \right\} \right)^n$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului $x \in R$.

prof. Alexandru Cărnaru

SUBIECTUL 4

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, dat prin $x_1 = \alpha$, cu $\alpha \in R^*, \alpha \neq 2$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{x_n^2 + 1}$, $(\forall) n \geq 1$. Să se calculeze:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^n$.

prof. Dorin Arventiev

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1.

a) Transpunând matricea C obținem:

$$C^t = (AB - BA)^t = (AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -C \dots\dots\dots 3p$$

Asadar C este o matrice antisimetrica de ordin impar si drept urmare

$$\text{Det} C = \text{Det}(-C^t) = (-1)^n \text{Det} C^t = (-1)^{2k+1} \text{Det} C = -\text{Det} C, \text{ de unde } \text{Det} C = 0$$

$$\text{b) } P(-x) = \text{Det}(C - xI_n) = \text{Det}(C - xI_n)^t = \text{Det}(C^t - xI_n) = \text{Det}(-C - xI_n) = (-1)^n \text{Det}(C + xI_n) \dots\dots\dots 4p$$

SUBIECTUL 2.

Folosim Cayley-Hamilton pentru matricea $(AB-BA)$

$$\text{Cum } \text{Tr}(AB-BA)=0 \dots\dots\dots 1p$$

$$(AB - BA)^2 + \det(AB - BA) \cdot I_2 = O_2 \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

Folosim $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ și $\text{Tr}(aX + bY) = a\text{Tr}X + b\text{Tr}Y$ și trecând la urmă în relația (1),

$$\text{obținem: } 2\text{Tr}((AB)^2) - 2\text{Tr}(A^2B^2) + 2\det(AB - BA) = 0 \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } (AB)^2 - \text{Tr}(AB) \cdot AB + \det(AB) \cdot I_2 = O_2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{și prin trecere la urmă obținem } \text{Tr}((AB)^2) - (\text{Tr}(AB))^2 + 2\det(AB) = 0 \quad (3) \dots\dots\dots 1p$$

Cum $(\text{Tr}(AB))^2 = \text{Tr}(A^2B^2)$, folosind relațiile (2) și (3), avem

$$\det(AB - BA) = 2 \cdot \det(AB) = 2 \det A \cdot \det B \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 3

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 1} \right\} = \sqrt{n^2 + 1} - \left[\sqrt{n^2 + 1} \right], \text{ dar } \sqrt{n^2 + 1} = n \text{ pentru că } n \leq \sqrt{n^2 + 1} < \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ și } \left[\sqrt{n^2 - 1} \right] = n - 1 \text{ pentru că } n - 1 \leq \sqrt{n^2 - 1} < n \Rightarrow \left\{ \sqrt{n^2 + 1} \right\} + \left\{ \sqrt{n^2 - 1} \right\} = \sqrt{n^2 + 1} - n + \sqrt{n^2 - 1} - n + 1, n \geq 1, n > n_\epsilon > 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n + \sqrt{n^2 - 1} - n + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} + \frac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} + 1 \right) = 0 + 1 \dots\dots\dots 2p$$

Avem limită de tip Euler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\{ \sqrt{n^2 + 1} \right\} + \left\{ \sqrt{n^2 - 1} \right\} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} - 2n \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} - 2n)} = e^0 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 4

$$\text{a) } x_{n+1} - 2 = \frac{2x_n - x_n^2}{x_n^2 + 1} = \frac{x_n}{x_n^2 + 1} (2 - x_n), \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - 2| = |x_n - 2| \cdot \left| \frac{x_n}{x_n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n - 2| \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow |x_n - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - 2| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + x_n - 2)^{\frac{1}{x_n - 2}} \right]^{n(x_n - 2)} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\left| n(x_n - 2) \right| \leq \frac{n}{2^{n-1}} |x_1 - 2| \rightarrow 0 \Rightarrow n(x_n - 2) \rightarrow 0 \dots\dots\dots 2p$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $x_n \notin \{0, 2\} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .