



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapalocală
21februarie 2016

Clasa a VIII-a

1.a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 10$ are loc inegalitatea:
 $9 \cdot n^3 > 5 \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3).$

b) Să se aratecă:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2, \forall a, b, c \in (0; \infty).$$

2.a) Să se calculeze:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care numărul:

$$\frac{1-a_1(1-\sqrt{2})}{a_1+1+\sqrt{2}} + \frac{1-a_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{a_2+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1-a_n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{a_n+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \in \mathbb{N}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_+^*.$$

3. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic. Fie G mijlocul segmentului (AB') și $i\{E\} = A' C \cap (AB' D')$. Dacă $EG \perp A' C$, $EG \perp AB'$, arătați că $ABCD A' B' C' D'$ este cub.

4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale $\triangle BCD, \triangle ACD$, respectiv $\triangle ABD$.

a) Arătați că planul $(G_1 G_2 G_3)$ este paralel cu planul (ABC) .

b) Demonstrați că dreptele AG_1, BG_2, CG_3 sunt concurente.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Timp de lucru: 3 ore.

Soluții clasa a VIII-a:

1. a) Inegalitatea din enunț se mai scrie:

$$9 \cdot n^3 > 5 \cdot (n^3 + 6 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 6), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{5} \cdot n^3 > 6 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 6, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10 | : n^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{5} > \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{6}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10.$$

Dar pentru $n \geq 10$ se obțin inegalitățile: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$,

$$\frac{6}{n} \leq \frac{6}{10} \quad (1);$$

$$\frac{11}{n^2} \leq \frac{11}{100} \quad (2);$$

$$\frac{6}{n^3} \leq \frac{6}{1000} \quad (3).$$

Adunând relațiile (1), (2), (3) obținem:

$$\frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{6}{n^3} < \frac{6}{10} + \frac{11}{100} + \frac{6}{1000} = \frac{600 + 110 + 6}{1000} = \frac{716}{1000} < \frac{800}{1000} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{6}{n^3} < \frac{4}{5}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10.$$

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad | \cdot a^2 \Rightarrow \frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2$ însumând cu analogele

$$\frac{a^3}{b} + ab + \frac{b^3}{c} + bc + \frac{c^3}{a} + ca \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ab + bc).$$

$$\text{Rămâne de arătat că } 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ab + bc) \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

$$2. \text{ a) } \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{k+1-k} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) =$$

$$= \sqrt{n+1} - 1;$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{1 - a_k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{a_k + \sqrt{k} - \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{[1 - a_k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})](\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}{(a_k + \sqrt{k} - \sqrt{k+1})(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + a_k}{(a_k + \sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) =$$

$$= \sqrt{n+1} - 1;$$

$$\sqrt{n+1} - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n = k^2 - 1, \quad k \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

3. Fie F punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $A'B'C'D'$.

$$A \in (AB'D'), F \in (AB'D');$$

$$A \in (AA'C), F \in (AA'C);$$

$$\Rightarrow (AB'D') \cap (AA'C) = AF, AF \cap A'C = \{E\}.$$

$$\text{Deoarece } E \in A'C, E \in AF \subset (AB'D') \Rightarrow \{E\} = A'C \cap (AB'D').$$

Deoarece $ABB'A'$ este dreptunghi și G este mijlocul lui AB' este și mijlocul $A'B$.

$$BC \perp (ABB') \Rightarrow BC \perp AB', \text{ rezulta } AB' \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} AB' \perp EG \\ AB' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AB' \perp (A'BC) \Rightarrow A'B \perp AB' \Rightarrow ABB'A' \text{ pătrat (1).}$$

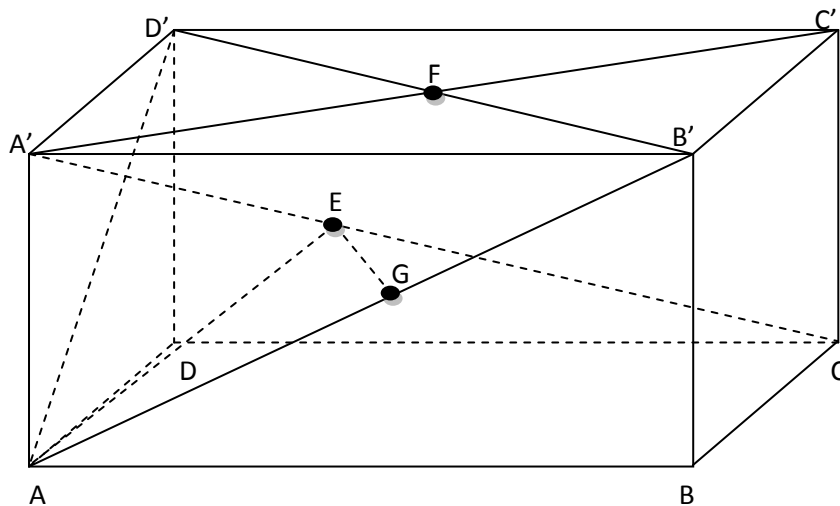
$$\left. \begin{array}{l} AG \perp (A'BC) \\ EG \perp A'C \\ A'C \subset (A'BC) \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp A'C \text{ (Conform teoremei celor trei perpendiculare)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAA} \equiv \widehat{AFE} \equiv \widehat{AA'E} \Rightarrow \Delta FA'A \sim \Delta A'AC \Rightarrow \frac{A'F}{AA'} = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{2AA'} = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2AA'^2 = 2AB^2 \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \text{ (2).}$$

Din $ABCD$ este dreptunghi și (2) rezultă că $ABCD$ este pătrat (3).

Din $ABCD A'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic și din (1), (3) rezultă că $ABCD A'B'C'D'$ este cub.



4.a) Fie (BM) , (AM) , (BN) mediane în ΔBCD , ΔACD , respectiv ΔABD , iar G_1 , G_2 , G_3 centrele de greutate ale ΔBCD , ΔACD , respectiv ΔABD . Avem:

$$\frac{BG_1}{BM} = \frac{2}{3} \cdot BM \cdot \frac{1}{BM} = \frac{2}{3} \text{ și } \frac{AG_2}{AM} = \frac{2}{3} \cdot AM \cdot \frac{1}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BG_1}{BM} = \frac{AG_2}{AM} \xrightarrow{R.T.Thales} G_1G_2 \parallel AB$$

$$\text{șicum } AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC) \text{ (1)}$$

$$\text{Analog: } \frac{BG_1}{BM} = \frac{BG_3}{BN} = \frac{2}{3} \xrightarrow{R.T.Thales} G_1G_3 \parallel MN \text{ și } MN \text{ linie mijlocie în } \Delta ACD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \\ \Rightarrow G_1G_3 \parallel AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_3 \parallel (ABC) \text{ (2). Dar } G_1G_2, G_1G_3 \text{ sunt drepte concurente}$$

$$\text{din planul } (G_1G_2G_3) \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC).$$

$$\text{b) În } \Delta AMB, AG_1 \cap BG_2 = \{P\}, \frac{G_2P}{PB} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Fie } \Delta BCN. \text{ Presupunem că } BG_2 \cap CG_3 = \{P'\}.$$

$$\text{În } \Delta BCN, \frac{G_2P'}{BP'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{există două puncte în interiorul } (BG_2) \text{ care îl împart în raportul } \frac{1}{3},$$

absurd. Deci, presupunerea făcută este falsă, iar $BG_2 \cap CG_3 = \{P\}$.

$$\text{Rezultă } AG_1, BG_2, CG_3 \text{ sunt concurente în } P \text{ astfel încât } \frac{G_2P}{PB} = \frac{1}{3}.$$

