



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21februarie2016

Clasa a V-a

1. Cel mai mare număr \overline{abcd} , scris în baza 10, reprezintă anul de naștere al “Domnului Problemă”, care verifică relația: $(c + 1)d = 5 \cdot a(b - 1)$.
Să se determine vârsta acestuia.

2.a) Găsiți două numere naturale care împărțite dau câtul 49, iar restul este strict mai mare decât 4 și cu 294 mai mic decât deîmpărțitul.

b) Fie $A = n^{2016} + (n + 1)^{2016} + (n + 2)^{2016} + \dots + (n + 9)^{2016}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se determine restul împărțirii lui A la 10.

3. Fie $a, b, c, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că:

$$A = (a^n + b^n)(c^n + b^n)(a^n + c^n), \text{ este divizibil cu } 2.$$

b) Să se arate că: $4^A - 1 : 15$.

4. Să se determine numerele \overline{abc} astfel încât:

$$2 \cdot (\overline{ab} + \overline{ba}) + 2^c = 67.$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Timp de lucru: 2 ore.

Soluții clasa a V-a:

1. Relația din enunț se mai scrie:

$$10 \cdot (c + 1) + d = 5 \cdot (10a + b - 1) (*)$$

Rezultă că $d : 5$, deci $d = 0$ sau $d = 5$.

Cazul I: $d = 0$.

Egalitatea (*) devine $10 \cdot (c + 1) = 5 \cdot (10a + b - 1)$ sau

$2 \cdot (c + 1) = 10a + b - 1$. Din enunț se deduce $2 \cdot (c + 1) \leq 18$, iar $a = \overline{1, 9}$, rezultă $a = 1$. Se obține $2 \cdot (c + 1) = b + 9$. Din ultimă relație se deduce că cifra b este impară, iar cum numărul \overline{abcd} este cel mai mare, dar în așa fel încât $b + 9 \leq 18$, se obține $b = 9$. Rezultă $c = 8$, iar anul de naștere, pentru acest caz este **1980**.

Cazul II: $d = 5$.

Egalitatea (*) devine $10 \cdot (c + 1) + 5 = 5 \cdot (10a + b - 1)$ sau

$2 \cdot (c + 1) + 1 = 10a + b - 1$. Altfel $2 \cdot (c + 1) = 10a + b - 2$. Din proprietatea 2. se deduce $2 \cdot (c + 1) \leq 18$, iar $a = \overline{1, 9}$, rezultă $a = 1$. Se obține $2 \cdot (c + 1) = b + 8$. Din ultima relație se deduce că cifra b este pară, iar cum numărul \overline{abcd} este cel mai mare, dar în așa fel încât $b + 8 \leq 18$, $b = \overline{0, 9}$, se obține $b = 8$. Rezultă $c = 7$, iar anul de naștere, pentru acest caz este **1875**.

Comparând numerele găsite în cazurile enumerate mai sus, se constată că cel mai mare dintre ele este **1980**, care reprezintă anul de naștere al "Domnului Problemă".

Vârsta "Domnului Problemă" este: $2016 - 1980 = \mathbf{36 \text{ ani}}$.

2.a) Fie a și b cele două numere. Presupunem $a > b$.

Condițiile din enunț se mai scriu :

$$a = 49b + r \quad (1);$$

$$r > 4 \quad (2);$$

$$r = a - 294 \quad (3).$$

Din relațiile (1) și (3) rezultă că $a = 49b + a - 294$, de unde $49b = 294$

$$\Rightarrow b = 6. \text{ Atunci } r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$\text{Cum } r > 4 \Rightarrow r = 5.$$

$$\text{Atunci } a = 299.$$

Deci numerele căutate sunt 299 și 6.

b) Restul împărțirii lui A la 10 este identic cu ultima cifră a lui A .

Numerele $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$ au ultima cifră $0, 1, 2, \dots, 9$, într-o ordine aleatorie.

$$\text{Deci } uc(A) = uc(0^{2016} + 1^{2016} + 2^{2016} + \dots + 9^{2016}) =$$

$$= uc(0 + 1 + 6 + 1 + 6 + 5 + 6 + 1 + 6 + 1) = 3.$$

Rezultă că restul împărțirii lui A la 10 este 3.

3.a) Numerele a^n, b^n, c^n sunt ori pare ori impare. Deoarece sunt 3 numere, conform principiului „cutiei” cel puțin două dintre ele sunt la fel: pare sau impare, atunci suma lor este număr par și atunci numărul A este par, deci divizibil cu 2.

$$b) A = 2k \Rightarrow 4^A - 1 = 16^k - 1 = (15 + 1)^k - 1 = M15 + 1 - 1 = M15.$$

$$4. \text{ Dacă } c=0 \text{ atunci } 2 \cdot (\overline{ab} + \overline{ba}) = 66 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{ba} = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11(a + b) = 33 \Rightarrow a + b = 3.$$

Cum a și b sunt nenule obținem: $a = 1$ și $b = 2$ sau $a = 2$ și $b = 1$.

Deci numerele sunt: 120 și 210.

Dacă $c \neq 0$, atunci 2^c este număr par și cum și $2 \cdot (\overline{ab} + \overline{ba})$ este tot număr par, suma lor nu poate fi 67.