

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –**

**CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a = \sqrt{\frac{2-x}{4}}, x \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ și } B = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid a = \sqrt{\frac{2-x}{9}}, a \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Soluție:

Din $a = \sqrt{\frac{2-x}{4}} = \frac{\sqrt{2-x}}{2}$ și $a \in \mathbb{Q}$ avem că $2-x$ este pătrat perfect și $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$, $x \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x=1$ avem $a = \frac{\sqrt{2-1}}{2} = \frac{1}{2}$ iar pentru $x=2$ avem $a = \frac{\sqrt{2-2}}{2} = 0$, de unde $A = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$.

Din $a = \sqrt{\frac{2-x}{9}} = \frac{\sqrt{2-x}}{3}$ și $a \in \mathbb{Q}$ avem că $2-x$ este pătrat perfect și $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$, $x \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x=1$ avem $a = \frac{\sqrt{2-1}}{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, și pentru $x=2$ avem $a = \frac{\sqrt{2-2}}{3} = 0 \in \mathbb{Q}$, de unde $B = \left\{ \frac{1}{3}, 0 \right\}$.

Avem $A \cup B = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 2 \right\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Determină mulțimile $A = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$ și $B = \left\{ \frac{1}{3}, 0 \right\}$	3p
Determină $A \cup B = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 2 \right\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$	4p

Subiectul 2. Fie $x \neq 1$, $y \neq -2$, $z \neq -3$ numere raționale, astfel încât $\frac{2015}{x+1} + \frac{2015}{y+2} + \frac{2015}{z+3} = 2014$.

Calculați $\frac{x-1}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z+1}{z+3}$.

Soluție:

Din $\frac{2015}{x+1} + \frac{2015}{y+2} + \frac{2015}{z+3} = 2014$, împărțind egalitatea la 2015 avem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} = \frac{2014}{2015}$.

Cum $\frac{x-1}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z+1}{z+3} = \frac{x+1-2}{x+1} + \frac{y+2-2}{y+2} + \frac{z+3-2}{z+3} = 1 - \frac{2}{x+1} + 1 - \frac{2}{y+2} + 1 - \frac{2}{z+3} =$

$$= 3 - 2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \right) = 3 - 2 \cdot \frac{2014}{2015} = \frac{2017}{2015}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Arată că $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} = \frac{2014}{2015}$	2p
Calculează $\frac{x-1}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z+1}{z+3} = 3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \right) = \frac{2017}{2015}$	5p

Subiectul 3. În triunghiul oarecare ABC , se consideră M și N mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[AM]$, punctul D simetricul punctului C față de A , $BN \cap AC = \{S\}$, $DM \cap AB = \{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului $[SC]$.

- Demonstrați că $AC = 3PC$.
- Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.
- Calculați aria triunghiului ANS , știind că aria triunghiului ABC este egală cu 48cm^2 .

Soluție:

a) În $\triangle SBC$, $[MP]$ este linie mijlocie de unde avem $MP \parallel BS$. În $\triangle AMP$ avem $NS \parallel MP$ și N mijloacele segmentelor $[AM]$ avem din reciproca teoremei liniei mijlocii că S este mijlocul segmentelor $[AP]$. Prin urmare avem $AS = SP = PC = \frac{AC}{3}$,

deci $AC = 3 \cdot PC$.

b) În $\triangle DBC$, $[DM]$ și $[BA]$ sunt mediane și $DM \cap AB = \{T\}$ de

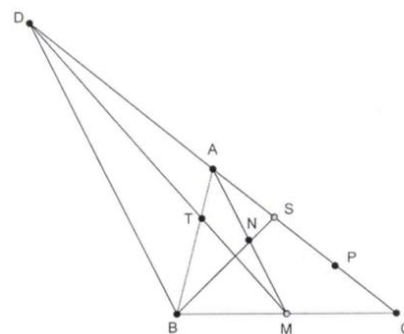
unde rezultă că T este centrul de greutate a $\triangle DBC$. Avem că

$\frac{AT}{AB} = \frac{1}{3}$. Din $AS = \frac{AC}{3}$ avem $\frac{AS}{AC} = \frac{1}{3}$. Cum $\frac{AT}{AB} = \frac{AS}{AC}$, din reciproca teoremei lui Thales se obține că $ST \parallel BC$.

c) Dacă $AS = a \Rightarrow SC = 2a$, $AD = 3a$. Deoarece $[AM]$ este linie mijlocie în $\triangle DBC$ avem $AM \parallel BD$, ceea ce înseamnă că $AN \parallel BD$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle SBD$ avem:

$\frac{SN}{SB} = \frac{SA}{SD} = \frac{1}{4}$, deci $\frac{A_{\triangle ANS}}{A_{\triangle ABS}} = \frac{1}{4}$, (1). Deoarece $\frac{AS}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A_{\triangle ABS}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$, (2). Înmulțind relațiile (1) și

(2) obținem $\frac{A_{\triangle ANS}}{A_{\triangle ABS}} = \frac{1}{12}$, deci $A_{\triangle ANS} = 4\text{cm}^2$.



Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Demonstrați că $AC = 3PC$	2p
b) Demonstrați că $ST \parallel BC$	3p
c) Notează $AS = a$, $SC = 2a$, $AD = 3a$ și arată că $\frac{A_{\triangle ANS}}{A_{\triangle ABS}} = \frac{1}{4}$ și $\frac{A_{\triangle ABS}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$	1p

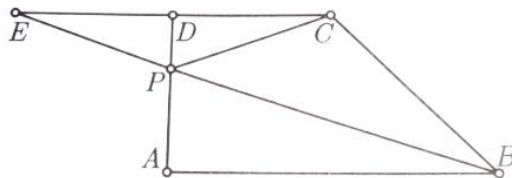
Obține prin înmulțire că $\frac{A_{\triangle A'NS}}{A_{\triangle ABS}} = \frac{1}{12}$ și deduce că $A_{\triangle A'NS} = 4 \text{ cm}^2$

1p

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$ și P un punct variabil pe $[AD]$. Arătați că suma $PB + PC$ este minimă dacă și numai dacă $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD}$.

Soluție:

Fie E simetricul lui C față de punctul D . Cum PD este mediană și înălțime în $\triangle PEC$ avem $\triangle PEC$ isoscel de unde $PC = PE$ și $PB + PC = PB + PE$. Suma $PB + PE$



este minimă dacă punctele E, P, B sunt coliniare. Aceasta este echivalentă cu a spune că

$\triangle PDE \sim \triangle PAB$, de unde $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DC}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Construiește E simetricul lui C față de punctul D	1p
Deduce că $PB + PC = PB + PE$	2p
Precizează că suma $PB + PE$ este minimă dacă punctele E, P, B sunt coliniare	2p
Precizează echivalența cu a faptul că $\triangle PDE \sim \triangle PAB$, de unde $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DC}$	2p