

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –**

CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că dacă $a^{18} \in \mathbb{Q}$ și $a^{11} \in \mathbb{Q}$, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

Soluție:

Pentru $a \neq 0$ avem:

- $a^{11} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{11})^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{55} \in \mathbb{Q}, (1);$
- $a^{18} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{18})^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{54} \in \mathbb{Q}, (2);$

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^{55} : a^{54} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$.

Pentru $a = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
cazul $a \neq 0$	
- $a^{11} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{11})^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{55} \in \mathbb{Q}, (1)$	2p
- $a^{18} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{18})^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{54} \in \mathbb{Q}, (2)$	2p
Din (1) și (2) $\Rightarrow a^{55} : a^{54} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$	2p
cazul $a = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$	1p

Subiectul 2. Determinați valorile întregi ale lui x și y astfel încât

$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{și} \quad \sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}.$$

Soluție:

$$\text{Din } x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow x + 4 = 3y$$

$$\begin{aligned} \text{Din } x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 &= x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 + 12 - 12 = x^2 + 8x + 16 + 7y^2 + 8y - 12 = \\ &= (x + 4)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = (3y)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = 9y^2 + 7y^2 + 8y - 12 = \\ &= 16y^2 + 8y + 1 - 13 = (4y + 1)^2 - 13. \end{aligned}$$

$$\text{Din } \sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q} \text{ avem că } (4y + 1)^2 - 13 = k^2, \text{ pentru } k \in \mathbb{Q}.$$

Cum $(4y + 1)^2 - k^2 = 13 \Leftrightarrow (4y + 1 - k)(4y + 1 + k) = 13$ cu x și y din \mathbb{Z} . Analizând cazurile posibile obținem soluția $x = -10$ și $y = -2$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Face substituția $x + 4 = 3y$	1p
Deduce $x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = (4y + 1)^2 - 13$	2p

Precizează că dacă $\sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$ atunci $(4y+1)^2 - 13 = k^2$, $k \in \mathbb{Q}$ de unde rezultă că $(4y+1-k)(4y+1+k) = 13$	2p
Analizează cazurile posibile și precizează soluția $x = -10$ și $y = -2$	2p

Subiectul 3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, considerăm Q proiecția lui D' pe $A'C$ și S proiecția lui D' pe AC' . Arătați că:

a) $A'C \perp (D'QB')$;

b) $QS \parallel (ABC)$.

Soluție:

a) $D'B' \perp (ACC') \Rightarrow D'B' \perp A'C$,

Din $A'C \perp D'Q$, $A'C \perp D'B'$, $D'Q \cap D'B' = \{D'\} \Rightarrow A'C \perp (D'QB')$.

b) $\Delta D'A'C \equiv \Delta D'C'A \Rightarrow \sphericalangle D'A'C \equiv \sphericalangle D'C'A$

$\Delta D'A'Q \equiv \Delta D'C'S \Rightarrow [A'Q] \equiv [C'S]$

Din $A'Q = C'S$ și $A'O = C'O$ unde $\{O\} = A'C = AC'$ rezultă că $\Leftrightarrow QS \parallel A'C'$

Cum $A'C' \parallel AC$ și $AC \subset (ABC)$ avem $QS \parallel (ABC)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
a) $D'B' \perp (ACC') \Rightarrow D'B' \perp A'C$	1p
$A'C \perp D'Q$, $A'C \perp D'B'$, $D'Q \cap D'B' = \{D'\} \Rightarrow A'C \perp (D'QB')$	1p
b) $\Delta D'A'C \equiv \Delta D'C'A \Rightarrow \sphericalangle D'A'C \equiv \sphericalangle D'C'A$	1p
$\Delta D'A'Q \equiv \Delta D'C'S \Rightarrow [A'Q] \equiv [C'S]$	1p
Din $A'Q = C'S$ și $A'O = C'O$ unde $\{O\} = A'C = AC'$ rezultă că $\Leftrightarrow QS \parallel A'C'$	1p
Deduce că $QS \parallel (ABC)$	1p

Subiectul 4. Fie $VABCD$ o piramida patrulateră regulată. Punctul M este mijlocul înălțimii VO , punctul N este mijlocul segmentului BM , iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$. Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$.

Soluție:

Fie $Q \in (OB)$ astfel încât $PQ \parallel AB$ și R mijlocul lui (DO) . Din $PQ \parallel AB$ obținem $\frac{OQ}{QB} = \frac{OP}{PA} = \frac{1}{3}$.

Dacă $OQ = a$, atunci $BQ = 3a$, $OB = OD = 4a$, $OR = 2a$, $RQ = 3a$, adică $RQ = QB$. În ΔBMR , NQ este linie mijlocie, prin urmare $NQ \parallel MR$. În ΔVOD , MR este linie mijlocie, prin urmare $MR \parallel VD$.

Rezultă așadar că $NQ \parallel VD$ și cum $PQ \parallel CD$ din construcție, rezultă $(PQN) \parallel (VDC)$. Dar $NP \subset (PQN)$, deci $PN \parallel (VDC)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
Notează $Q \in (OB)$ astfel încât $PQ \parallel AB$ și R mijlocul lui (DO)	1p
Din $PQ \parallel AB$ deduce că $\frac{OQ}{QB} = \frac{OP}{PA} = \frac{1}{3}$	1p
Notează $OQ = a$ și deduce că $RQ = QB$	1p

Demonstrează că NQ este linie mijlocie în $\triangle BMR$ de unde rezultă că $NQ \parallel MR$	1p
Demonstrează că MR este linie mijlocie în $\triangle VOD$ de unde rezultă că $MR \parallel VD$	1p
Arată că $(PQN) \parallel (VDC)$ și deduce că $PN \parallel (VDC)$	1p