

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 18 februarie 2023

Clasa a X-a

Subiectul 1 (7p)

(4p) a) Calculați media aritmetică a numerelor a și b , unde $a = 3^{1+\log_3 7} - 2^{\log_4 121}$ și $b = 3^{\log_2 5} - 5^{\log_2 3}$.

(3p) b) Demonstrați că următoarea inegalitate este adevărată

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3, \text{ unde } a, b, c \in (0,1).$$

Subiectul 2 (7p)

(2p) a) Fie funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = |x - 2| + |4 - x|$. Arătați că funcția f nu este injectivă.

(3p) b) Determinați perechile $(a, b) \in R \times R$, pentru care funcțiile următoare au aceeași imagine $f: [0,2] \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: [a, b] \rightarrow R$, $g(x) = x^2$.

(2p) c) Arătați că dacă A este o mulțime finită și $f: A \rightarrow A$ este o funcție injectivă, atunci f este și surjectivă.

Subiectul 3 (7p)

Dacă $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ și $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}}$, arătați că $A^2 + B^2$ este un număr rațional.

Subiectul 4 (7p)

Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ verifică inegalitatea $\left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| \leq 2$, arătați că $\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2$.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.