

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a XII - a

1. Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^4 = e$ și $ab = ba^3$, unde e este elementul neutru. Arătați că $b = a^n b a^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Supliment Gazeta Matematică 9/2022

2. Fie (G, \cdot) un grup finit cu n elemente, cu proprietatea:

$$\forall a \in G, \text{ ecuația } x^2 = a \text{ are soluție în } G.$$

a) Arătați că n este impar.

b) Pentru n impar oarecare, dați un exemplu de grup care verifică ipoteza problemei.

3. Determinați primitiva $F: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin^3 x + \cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x}$$

pentru care $1 + F\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = 0$.

4. Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ admite o primitivă $F: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ pentru care are loc egalitatea

$$(x^2 + 1)F(x) = (x^4 + 1)f(x), \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Determinați funcția f , știind că $f(1) = 1$.

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru – 3 ore