

Olimpiada Națională de Matematică 2023**Etapă locală – Iași, 10 februarie 2023****Clasa a XII-a****Problema 1.**

- a) Arătați că funcțiile $F, G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \arctg x$ și $G(x) = -\arctg \frac{1}{x}$ sunt primitive ale aceleași funcții.
- b) Calculați $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Considerăm grupurile $((0, \infty), \cdot)$ și $((-3, 3), *)$, unde legea “*” este definită prin

$$a * b = \frac{9(a+b)}{9+ab}, \forall a, b \in (-3, 3).$$

- a) Determinați $n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f(x) = \frac{x+n}{3-x}$, $f : ((-3, 3), *) \rightarrow ((0, \infty), \cdot)$ să fie izomorfism de grupuri.
- b) Rezolvați ecuația $x * x * x * x * x = 2$.

Problema 3. Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că dintre orice trei elemente ale sale există două care comută. Arătați că (G, \cdot) este comutativ.

Problema 4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 3} dx$.

- a) Calculați I_1 .
- b) Arătați că $(n+3)I_{n+1} + 3nI_{n-1} = 8$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.
- c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (nI_n)$.

Supliment Gazeta Matematică nr.10/2022

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7p