



A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023
Clasa a XI-a

Problema 1.

Demonstrați că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \\ b^2 + bc + c^2 & c^2 + ca + a^2 & a^2 + ab + b^2 \\ b + c & c + a & a + b \end{vmatrix}$$

este divizibil cu $(ab + bc + ca)^2$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Problema 2.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că

- a) egalitatea $AB - BA = I_2$ nu se poate îndeplini;
- b) dacă $(AB - BA)^{2022} = I_2$, atunci $(AB - BA)^2 = I_2$.

Problema 3.

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{3}{8} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + 4} \right).$$

Gazeta Matematică

Problema 4.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0, 1)$ și

$$x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și în caz de convergență calculați limita acestuia.
- b) Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n.$$

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.