

73. Országos Matematika Olimpia
Körzeti szakasz, 2023. február 11.

VIII. osztály

1. feladat. Adottak az

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x-1}{3} \right| \leq 2023 \right\} \text{ és } B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ a } 7 \text{ egy többszöröse} \} \text{ halmazok.}$$

- a) Írd fel az A halmazt intervallum alakjában!
- b) Határozd meg az $A \cap B$ halmaz elemeinek számát!

2. feladat.

- a) Számítsd ki az x valós szám értékét, ha

$$x = \left[(5 - 2\sqrt{6})^{2023} + \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^{2023}} \right] \cdot \frac{(10 + 4\sqrt{6})^{2023}}{2^{2024}}.$$

- b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{Q}$ értékét úgy, hogy

$$a(\sqrt{2} + 2) + \sqrt{2} = b(2\sqrt{2} + 1) + 2.$$

3. feladat. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 10$ cm, $BC = 5$ cm. A téglalap síkjára a sík ugyanazon oldalán meghúzzuk az AA' , BB' , CC' és DD' merőlegeseket úgy, hogy $AA' = 12$ cm, $BB' = 6$ cm és $CC' = 10$ cm. Legyen az M az $A'C'$ és N a $B'D'$ szakasz felezőpontja.

- a) Bizonyítsd be, hogy az MN egyenes merőleges az (ABC) síkra!
- b) Ha $MN = 1$ cm, számítsd ki a DD' szakasz hosszát!

4. feladat. Az ABC háromszög síkjára emeljünk egy AD merőlegest. Legyenek G_1, G_2, G_3, G_4 az ABC , DBC , DAB , valamint a DAC háromszögek súlypontjai. Bizonyítsd be, hogy:

- a) $G_1G_2 \perp G_3G_4$;
- b) $AD = BC$ akkor és csakis akkor, ha $G_1G_2 = G_3G_4$.

Gazeta Matematică

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.