

73. Országos Matematika Olimpia
Körzeti szakasz, 2023. február 11.

X. osztály

1. feladat. Az $a, b, c \in (1, \infty)$ esetén vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = \log_{bc} a, y = \log_{ca} b, z = \log_{ab} c$$

a) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Az ABC háromszög csúcsainak affixumai z_A, z_B és z_C . Ha $|z_A| = |z_B| = |z_C| = z_A + z_B + z_C$, igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

3. feladat Határozd meg az $n \in \mathbb{N}$ prímszámot úgy, hogy az

$$x = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

racióális szám legyen!

4. feladat.

a) Igazold, hogy bármely r racionális szám felírható két olyan irracionális szám összegeként, melyeknek a szorzata irracionális!

b) Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy $f(xy) = f(x + y)$ minden x és y irracionális szám esetén!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.