



**A 73-a Olimpiadă Națională de Matematică**  
**Etapa zonală, 11 februarie 2023**  
**Clasa a X-a**

**Problema 1.** Fie  $a, b, c \in (1, \infty)$  și  $x = \log_{bc} a$ ,  $y = \log_{ca} b$ ,  $z = \log_{ab} c$ .

- a) Arătați că  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$ .
- b) Demonstrați că  $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie triunghiul  $ABC$  cu afixele vârfurilor  $z_A, z_B$  respectiv  $z_C$  astfel încât  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = z_A + z_B + z_C$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic!

**Problema 3.** Determinați numărul prim  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât numărul

$$x = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

să fie rațional!

**Problema 4.**

- a) Demonstrați că orice număr rațional  $r$  se poate scrie ca suma a două numere iraționale ale căror produs este irațional!
- b) Determinați toate funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația  $f(xy) = f(x + y)$  pentru orice  $x$  și  $y$  irațional!

*Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!*

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.*