



A 73-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023
Clasa a XII-a

Problema 1.

Calculați integrala $\int \frac{1}{x^{675} + x^{2023}} dx$, unde $x \in (0, \infty)$.

Problema 2.

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f(x, y) = \frac{a(x+y)}{1+xy}$ să definească o lege de compoziție pe intervalul $(-1, 1)$.

Problema 3.

Notăm cu e elementul neutru al grupului finit (G, \circ) . Elementele distincte $a, b \in G$ au ordinul 2.

a) Arătați că $(a \circ b) \notin \{e, a, b\}$.

b) Știind că $a \in Z(G)$, unde $Z(G) = \{z \in G \mid z \circ y = y \circ z, \forall y \in G\}$, arătați că ordinul lui G e multiplu de 4.

Problema 4.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ astfel încât f este continuă, iar g admite primitive. Arătați că funcția $f \cdot g$ admite primitive pe I .

Gazeta matematică

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.