

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a V-a

1. În lumea poveştilor, numerele naturale se transformă în figuri geometrice respectând următoarele reguli:
- (1) Numărul 0 se transformă în triunghi, numărul 1 se transformă în pătrat iar numărul 2 se transformă în cerc.
 - (2) x şi $x+3$ se transformă în aceeaşi figură geometrică, pentru oricare număr natural x .

Arătaţi că:

- (a) Orice număr natural se transformă în triunghi, pătrat sau cerc.
- (b) Suma a oricăror trei numere naturale care se transformă în figuri diferite este un număr care se împarte exact la trei.
- (c) Numărul 2023 nu se transformă în cerc.

Marinela Platon

2. În Regatul Dragonilor există dragoni roşii şi dragoni verzi. Fiecare dragon roşu are 6 capete, 8 picioare şi 2 cozi. Fiecare dragon verde are 8 capete, 6 picioare şi 4 cozi. În total, dragonii au 44 de cozi. Se mai cunoaşte că picioarele verzi sunt cu 6 mai puţine decât capetele roşii. Aflaţi numărul dragonilor roşii din regat.

Adriana Caţaron

3. Într-o urnă sunt 5 bile roşii, 10 albastre, 7 verzi şi 12 galbene. Care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem din urnă pentru a fi siguri că există două culori distincte astfel încât, printre bilele extrase, să găsim cel puţin câte două bile de fiecare din cele două culori?

Andrei Caţaron

4. (a) Arătaţi că numărul 2022 se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.
(b) Arătaţi că numărul 2022^{2023} se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Gazeta Matematică (enunţ modificat)

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a VI-a

1. Alexandra a cumpărat un atlas geografic pe care a plătit mai mult de 150 de lei şi mai puţin de 200 lei, dar nu îşi mai aduce aminte exact preţul. L-a achitat folosind bancnote de 5 şi de 10 lei. Alexandra a reţinut doar că raportul dintre numărul bancnotelor de 5 lei şi numărul bancnotelor de 10 lei folosite a fost de $\frac{2}{3}$.

O puteţi ajuta pe Alexandra să îşi amintească preţul atlasului şi cu câte bancnote de 5 lei şi respectiv de 10 lei a plătit cartea?

Ioana Maşca

2. Fie $n > 4$ un număr natural compus. Arătaţi că numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ se divide cu n .

Andrei Caţaron

3. Fie unghiurile adiacente \widehat{AOB} şi \widehat{BOC} , (OM bisectoarea unghiului \widehat{AOB} , (ON bisectoarea unghiului \widehat{MOB} , iar (OP bisectoarea unghiului \widehat{AON} . Ştiind că $OP \perp OC$ şi $7\widehat{BOC} = 10\widehat{MOP}$, determinaţi măsurile unghiurilor \widehat{BOC} şi \widehat{AOC} .

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii

4. Fie un număr natural $n \geq 3$. Pe un cerc se consideră punctele distincte A_1, A_2, \dots, A_n , astfel încât arcele $\widehat{A_1 A_2}, \widehat{A_2 A_3}, \dots, \widehat{A_{n-1} A_n}, \widehat{A_n A_1}$ sunt congruente şi $A_1 \in \widehat{A_n A_2}$, $A_2 \in \widehat{A_1 A_3}, \dots, A_n \in \widehat{A_{n-1} A_1}$. Demonstraţi că printre punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ există două puncte diametral opuse, dacă şi numai dacă numărul natural n este par.

Lucica Ghişe

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a VII-a

1. Numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ verifică relația $a_1 + 2a_2 + \dots + 2023a_{2023} = 1$. Arătați că

$$4\sqrt{a_1 + 1} + 4\sqrt{2(a_2 + 1)} + \dots + 4\sqrt{2023(a_{2023} + 1)} \leq 2024 \cdot 2025.$$

Lucica Ghișe

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietatea că, pentru orice latură a sa, segmentele care unesc extremitățile laturii cu mijlocul laturii opuse sunt congruente. Demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi.

Ioana Mașca

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\hat{A} > 90^\circ$ și $\hat{B} > 90^\circ$. Demonstrați $AB < CD$.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciții (enunț modificat)

4. La o masă rotundă stau așezate $n \geq 3$ persoane astfel încât vârsta fiecăreia este media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate. Arătați că suma vârstelor tuturor persoanelor este divizibilă cu n .

Andrei Cațaron

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a VIII-a

1. Fie numărul $A = (9a^2 + 9a + 2)(9a^2 + 9a - 22) + 144$, unde $a \in \mathbb{N}^*$.
- (a) Arătați că A este pătrat perfect pentru orice număr a natural, nenul.
- (b) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul a , A este divizibil cu 4.

Mihaela Sinteia

2. Arătați că numărul natural $N = [\sqrt{1 \cdot 4}] + [\sqrt{2 \cdot 5}] + [\sqrt{3 \cdot 6}] + \dots + [\sqrt{2020 \cdot 2023}]$ este divizibil cu 2023, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

3. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ de muchie a . Fie M mijlocul lui AB , N mijlocul lui AD , iar O centrul feței $ADD' A'$.
- (a) Demonstrați că dreapta $C' O$ este perpendiculară pe planul $(A' MD)$.
- (b) Dacă P este mijlocul lui DC , iar Q mijlocul lui $A' B'$, demonstrați că planele $(C' OB)$ și (BPQ) sunt perpendiculare.

Gazeta Matematică

4. $ABCD$ este un tetraedru în care G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD , respectiv ABD .
- (a) Demonstrați că $(G_1 G_2 G_3) \parallel (BCD)$.
- (b) Fie $M \in (AC)$, astfel încât $AM < \frac{AC}{2}$, E mijlocul segmentului $[BC]$ și F mijlocul segmentului $[CD]$, iar $MG_1 \cap BC = \{P\}$ și $MG_2 \cap CD = \{Q\}$. Știind că patrulatele $AMEP$ și $AMFQ$ sunt inscriptibile, demonstrați că triunghiul BCD este isoscel.

Dorina Rapcea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.