

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Barem de evaluare și notare

clasa a VIII-a

ENUNȚ PROBLEMA 1:		
7p	Arătați că, pentru orice număr întreg n , numărul $n^5 - 16n$ este multiplu de 15.	
BAREM DE CORECTARE PENTRU PROBLEMA 1		7 puncte
7p	$n^5 - 16n = n(n^2 + 4)(n - 2)(n + 2)$	2p
	Demonstrează că pentru orice număr întreg n unul dintre factorii produsului este divizibil cu 3.	2p
	Demonstrează că pentru orice număr întreg n unul dintre factorii produsului este divizibil cu 5.	2p
	Concluzionează că numărul este multiplu de 15 pentru orice valoare a lui n .	1p

ENUNȚ PROBLEMA 2:		
	Fie x și y două numere reale astfel încât $x + 1 = 4y$.	
3p	a) Demonstrați că dacă $x \in [-1, 3]$, atunci $y \in [0, 1]$.	
4p	b) Arătați că dacă $x \in [-1, 3]$, atunci $\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10} = \sqrt{17}$	
BAREM DE CORECTARE PENTRU PROBLEMA 2		7 puncte
3p	a) Dacă $x \in [-1, 3]$, atunci $-1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 4y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 4y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$, deci $y \in [0, 1]$.	3p
4p	b) $\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(4y)^2 + y^2} = \sqrt{17} y $	1p
	$\sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(4y - 4)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{17} y - 1 $	2p
	Folosind punctul a), se obține rezultatul final: $\sqrt{17}y + \sqrt{17}(1 - y) = \sqrt{17}$	1p

ENUNȚ PROBLEMA 3:		
	În vârfurile dreptunghiului $ABCD$ se construiesc dreptele AA' , BB' , CC' și DD' perpendiculare pe planul dreptunghiului. Punctele A' , B' , C' și D' sunt de aceeași parte a planului dreptunghiului, astfel încât $AA' = DD'$, $BB' = CC'$ și $BB' = 2AA'$.	
3p	a) Demonstrați că punctele A' , B' , C' și D' sunt vârfurile unui dreptunghi.	
4p	b) Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor AB și $A'B'$, iar N este punctul de intersecție a dreptelor CD și $C'D'$, determinați intersecția planelor $(BB'N)$, $(CC'M)$ și $(AA'D')$.	
BAREM DE CORECTARE PENTRU PROBLEMA 3		7 puncte
3p	a) Demonstrează că $A'B'C'D'$ este paralelogram	1p
	Demonstrează că paralelogramul $A'B'C'D'$ are un unghi drept și deduce că este dreptunghi.	2p
4p	b) Demonstrează că dreapta MN este paralelă cu dreptele AD și $A'D'$. Demonstrează că dreptele CM și BN trec prin mijlocul P al segmentului AD ,	1p 2p

	iar dreptele $C'M$ și $B'N$ trec prin mijlocul Q al segmentului $A'D'$. Deduce că intersecția celor trei plane este dreapta PQ .	1p
--	--	-----------

ENUNȚ PROBLEMA 4:		
	Se consideră punctul A exterior planului triunghiului echilateral BCD de latură 4 cm, astfel încât $AB = AC = AD = \sqrt{6}$ cm.	
3p	a) Dacă M este mijlocul segmentului CD , determinați raportul dintre aria triunghiului ABC și aria triunghiului ABM .	
4p	b) Determinați poziția punctului P , situat pe segmentul CD , astfel încât aria triunghiului ABP să fie minimă.	
BAREM DE CORECTARE PENTRU PROBLEMA 4		7 puncte
3p	a) Determină aria triunghiului ABC .	1p
	Arată că piciorul O al perpendicularei duse din A pe planul (BCD) este situat pe segmentul BM și $BO = 2OM$.	1p
	Determină aria triunghiului ABM și arată că raportul dintre aria triunghiului ABC și aria triunghiului ABM are valoarea 2.	1p
4p	b) Demonstrează că dreapta AB este perpendiculară pe dreapta CD .	1p
	Construiește înălțimea CE a triunghiului ABC și demonstrează că dreapta AB este perpendiculară pe planul CED . Deduce că dreapta AB este perpendiculară pe dreapta PE , pentru orice poziție a punctului P pe segmentul CD . Prin urmare, aria triunghiului ABP este minimă atunci când înălțimea sa, PE , are lungime minimă.	2p
	Deoarece punctul E este fix, deduce că lungimea segmentului PE este minimă atunci când EP este înălțime în triunghiul CED . Demonstrează că piciorul înălțimii din E a triunghiului CED este punctul M , mijlocul segmentului CD . Concluzionează că aria triunghiului ABP este minimă atunci când punctul P coincide cu punctul M .	1p

Notă:

Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.