



Olimpiada Națională de Matematică
Județul ALBA - etapa locală -11 februarie, 2023

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XI-a

Problema 1.

Se consideră determinantul de ordin n , $n \in \mathbb{N}^*$

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

a) Calculați D_1 și D_2 ;

b) Calculați D_n

Soluție și barem:

- Calcul... $D_1 = 7$ și $D_2 = 39$ **1p**
- Dezvoltând după prima coloană obținem $D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2}$, $n \geq 3$, **2p**
- Rădăcinile ecuației caracteristice sunt 5 și 2, iar forma determinantului este $D_n = \alpha 5^n + \beta 2^n$ **2p**
- Din $D_1 = 7$ și $D_2 = 39$ obținem $\alpha = \frac{5}{3}$ și $\beta = -\frac{2}{3}$ **1p**
- Deci, $D_n = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Problema 2.

a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\text{Tr}A = n$ și $\det A = n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:
 $\det(A^2 + (n - 1)I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + (n + 1)I_2) = 4$.

Soluție și barem:

- a) calcul direct..... **2p**
- b) Din teorema Hamilton-Cayley rezultă $A^2 - nA + (n + 1)I_2 = O_2$, de unde $A^2 + (n + 1)I_2 = nA$, deci $\det(A^2 + (n + 1)I_2) = n^2 \det A = n^2(n + 1)$ **1p**
- Tot din H-C obținem $A^2 + (n - 1)I_2 = nA - 2I_2 = n\left(A - \frac{2}{n}I_2\right)$, iar $\det(A^2 + (n - 1)I_2) = n^2 \det\left(A - \frac{2}{n}I_2\right) = n^2 \left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 - n\frac{2}{n} + n + 1\right) = \dots = n^3 - n^2 + 4$ **2p**

- Tot din H-C obținem $A^2 + I_2 = n(A - I_2)$, de unde $\det(A^2 + I_2) = n^2 \det(A - I_2) = n^2((1)^2 - n + n + 1) = \dots = 2n^2$ **1p**
- Concluzia **1p**

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin: $a_1 = \sqrt{2023}$, și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2023}{2024}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și $1 \leq a_n \leq 2023$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
- Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$.

Soluție și barem:

- Notăm $a = 2023$ și avem $a_1 = \sqrt{a}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a}{a+1}$.
Pentru monotonie, avem $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - a)(a_n - 1)}{a+1}$ **1p**
- Demonstrăm, prin inducție matematică, $P(n): 1 \leq a_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots (2)$ **1p**
- Cu aceasta, obținem șirul descrescător, deci monoton (1)..... **1p**
- Avem, din (1) și (2) șir convergent, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in [1, a]$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $L = 1$ **1p**
- Pentru $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$, aplicăm Stolz-Cesaro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1 - a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n}{\frac{1}{1 - a_{n+1}} - \frac{1}{1 - a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{a_n - a_{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{\frac{(a_n - 1)(a_n - a)}{a+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a+1)}{-a_n + a} = 0$$
 2p

Problema 4.

Calculați următoarea limită: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \lg \frac{20^{n+1} + 3}{2^{n+1} + 5} \right)$.

Soluție și barem:

- Scriem limita ca produs de 2 limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \lg \frac{20^{n+1} + 3}{2^{n+1} + 5} \right)$ **1p**
- Pentru prima limită, conform criteriului radicalului obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \right) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$
..... **2p**
- Pentru a doua limită avem, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \lg \frac{20^{n+1} + 3}{2^{n+1} + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{20^{n+1} \left(1 + \frac{3}{20^{n+1}} \right)}{2^{n+1} \left(1 + \frac{5}{2^{n+1}} \right)} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\lg 10^{n+1} + \lg \frac{\left(1 + \frac{3}{20^{n+1}} \right)}{\left(1 + \frac{5}{2^{n+1}} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lg 10 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{\left(1 + \frac{3}{20^{n+1}} \right)}{\left(1 + \frac{5}{2^{n+1}} \right)} = \lg 10 + 0 = 1.$$
 3p

- In final , valoarea limitei este: e

1p