



Olimpiada Națională de Matematică
Județul ALBA - etapa locală - 11 februarie, 2023

Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Să se arate că $x^3 + 2 \geq 3x$, $(\forall) x > 0$.

b) Să se arate că $(\forall) a, b, c > 0$, avem:

$$\frac{1}{(a+b)^3+2} + \frac{1}{(b+c)^3+2} + \frac{1}{(c+a)^3+2} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Problema 2.

Fie numerele reale x, y care verifică $[x + y] = [x] + [y]$ și $[-x - y] = [-x] + [-y]$. Să se arate că numerele x, y sunt numere întregi.

Problema 3.

Se dă triunghiul ABC și punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ astfel încât $\frac{PB}{PA} = \frac{AC}{BC}$ și $\frac{QC}{QA} = \frac{AB}{BC}$.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Știind că $I \in PQ$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

Problema 4.

Se consideră triunghiul oarecare ABC cu centrul de greutate G și punctele B', C' picioarele bisectoarelor din B respectiv C . Să se arate că dacă punctele B', G și C' sunt coliniare, atunci

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}.$$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.