



Olimpiada Națională de Matematică  
Județul ALBA - etapa locală - 11 februarie, 2023

**Clasa a XII-a**

**Problema 1.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu 35 de elemente și  $f: G \rightarrow G$  un endomorfism al grupului  $G$ , cu proprietatea  $f(xf(xy)) = y^9 f(x^4)$ ,  $(\forall) x, y \in G$ .

- a) Să se arate că  $f$  este injectivă;
- b) Să se arate că  $G$  este abelian.

**Problema 2.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit de ordin  $m \cdot n$ , unde  $m$  și  $n$  sunt numere naturale prime între ele și  $f$  un endomorfism al grupului  $G$ .

- a) Să se arate că mulțimea  $H = \{x \in G \mid f(x) = x\}$  este subgrup al grupului  $G$ .
- b) Să se determine  $f$  știind că există  $a, b \in G$ , având ordinul  $m$  respectiv  $n$ , astfel încât  $f(a) = a$  și  $f(b) = b$ .

**Problema 3.**

Se consideră o funcție derivabilă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F$  o primitivă a sa cu proprietatea că există un număr  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \neq f(c)$ ,  $(\forall) a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ .

Să se arate că  $f'(c) = 0$ .

**Problema 4.**

Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  derivabile și bijective, cu proprietatea

$$\int_0^{f^{-1}(x)} f(t) dt = x - 1,$$

pentru orice număr real  $x > 0$ .

Gazeta Matematică

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*