

## Olimpiada Națională de Matematică

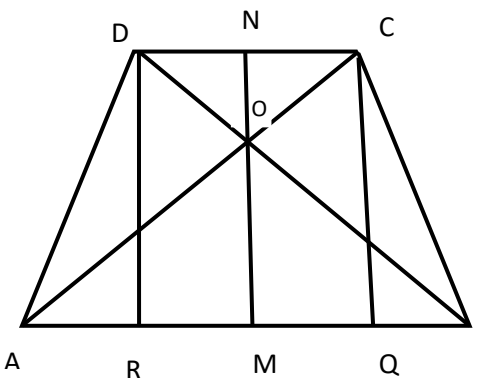
## Etapă Locală, județul Timiș

16.02.2024

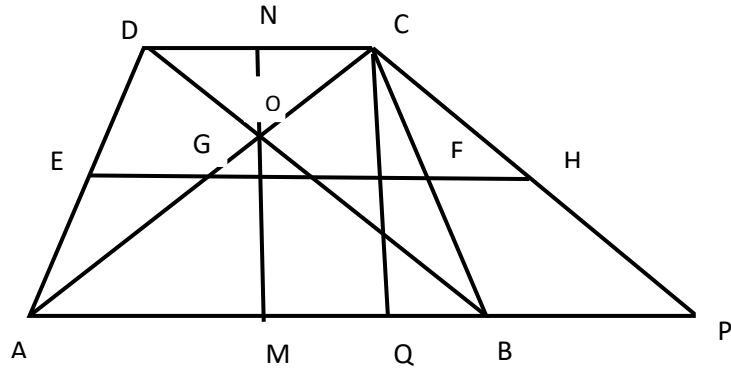
Clasa a VII-a

## SOLUȚII ȘI BAREM

1.	<p>a) Fie <math>A = 2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025}</math>. Arătați că <math>\sqrt{A}</math> este număr irațional.</p> <p>b) Demonstrați că <math>\sqrt{a+b+c}</math> este număr irațional, dacă <math>(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}) = 3</math>, unde prin <math>(x, y, z)</math> înțelegem c.m.m.d.c al numerelor <math>x, y, z</math>.</p>	
	<p>a) <math>u(2023^{2023}) = u(3^{2023}) = u(3^3) = 7; u(2024^{2024}) = u(4^{2024}) = 6;</math>  <math>u(2025^{2025}) = u(5^{2025}) = 5</math></p>	1p
	<p><math>u(A) = u(7 + 6 + 5) = u(18) = 8</math></p>	1p
	<p><math>A</math> nu este pătrat perfect <math>\Rightarrow \sqrt{A}</math> este număr irațional.</p>	1p
	<p>b) Dacă <math>(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}) = 3 \Rightarrow \overline{ab2} : 3 \Rightarrow a + b + 2 = M_3(1); \overline{bc7} : 3 \Rightarrow b + c + 7 = M_3(2)</math>  <math>\overline{ca8} : 3 \Rightarrow c + a + 8 = M_3(3)</math></p>	1p
	<p>Prin adunarea relațiilor (1),(2) și (3), obținem că <math>2a + 2b + 2c + 17 = M_3</math></p>	1p
	<p><math>2a + 2b + 2c + 2 = M_3 \Rightarrow 2(a + b + c + 1) = M_3 \Rightarrow a + b + c + 1 = M_3</math></p>	1p
	<p><math>a + b + c = M_3 + 2</math> care nu este pătrat perfect <math>\Rightarrow \sqrt{a+b+c}</math> este irațional.</p>	1p
2.	<p>a) Arătați că nu există numerele raționale <math>a</math> și <math>b</math> astfel încât:</p> $\sqrt{3(a-1)^2} + \sqrt{75} = \sqrt{(b+2)^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}.$ <p>b) Determinați numerele naturale <math>a</math> și <math>b</math> astfel încât: <math>\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 20 + 24 + 1</math>.</p>	
	<p>a) <math>\sqrt{3} a-1  + 5\sqrt{3} =  b+2  -  1-\sqrt{3}  \Rightarrow \sqrt{3} a-1  + 5\sqrt{3} =  b+2  - \sqrt{3} + 1</math></p>	1p
	<p><math>\sqrt{3}( a-1  + 6) =  b+2  + 1</math></p>	1p
	<p>Cum <math>a, b \in \mathbb{Q}</math>, rezultă că singura posibilitate ar fi ca <math> a-1  + 6 = 0</math> și <math> b+2  + 1 = 0</math>, imposibil.</p>	1p
	<p>b) <math>\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 45 \Rightarrow 20a^2 + 24b^2 + 1 = 45^2 = 2025 \Rightarrow 20a^2 + 24b^2 = 2024</math></p>	1p
	<p><math>5a^2 + 6b^2 = 506 \Rightarrow 5a^2</math> e par <math>\Rightarrow a^2</math> e par <math>\Rightarrow a</math> e par, dar <math>5a^2 &lt; 506 \Rightarrow a^2 \leq 100</math>, ca urmare <math>a \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}</math></p>	1p
	<p>Dacă <math>a = 0 \Rightarrow 6b^2 = 506 \Rightarrow b^2 = \frac{506}{6}</math>, nu e soluție;  Dacă <math>a = 2 \Rightarrow 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 486 \Rightarrow b^2 = 81 \Rightarrow b = 9</math>, e soluție;  Dacă <math>a = 4 \Rightarrow 5 \cdot 4^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 426 \Rightarrow b^2 = 71</math>, nu e soluție;  Dacă <math>a = 6 \Rightarrow 5 \cdot 6^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 326 \Rightarrow b^2 = \frac{326}{6}</math>, nu e soluție;  Dacă <math>a = 8 \Rightarrow 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 186 \Rightarrow b^2 = 31</math>, nu e soluție;  Dacă <math>a = 10 \Rightarrow 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1</math> e soluție.  Deci soluțiile sunt: <math>a = 2, b = 9</math> și <math>a = 10, b = 1</math>.</p>	2p

3.	<p>Fie <math>E</math> un punct pe latura <math>DC</math> a pătratului <math>ABCD</math>, <math>AN</math> bisectoarea unghiului <math>\angle EAB</math>, <math>N \in BC</math> și <math>P</math> punctul de intersecție a dreptelor <math>AE</math> și <math>BC</math>. Perpendiculara din <math>P</math> pe <math>NE</math> intersectează dreapta <math>DC</math> în <math>M</math>. Demonstrați că:</p> <p>a) <math>NA</math> este bisectoarea unghiului <math>\angle MNB</math>;</p> <p>b) <math>MN = DM + BN</math>;</p> <p>c) <math>\angle MAN = 45^\circ</math>.</p>	G.M
	<p>a) Notăm <math>NE \cap MP = \{F\}</math>, <math>MN \cap AP = \{G\}</math>. În triunghiul <math>PMN</math> avem <math>MC \perp PN</math>, <math>NF \perp MP</math>, <math>MC \cap NF = \{E\}</math>, deci <math>E</math> este ortocentrul triunghiului <math>PMN</math>, prin urmare <math>PG \perp MN</math>.</p>	1p
	Atunci $\angle ANM = 90^\circ - \angle GAN(1)$ , $\angle ANB = 90^\circ - \angle BAN(2)$	1p
	Din (1), (2) și $\angle GAN = \angle BAN$ , rezultă că $NA$ este bisectoarea unghiului $\angle MNB$	1p
	b) $\triangle ANG \equiv \triangle ANB(I.U) \Rightarrow BN = GN(3)$ și $AG = AB \Rightarrow AG = AD$ și $\triangle ADM \equiv \triangle AGM(I.C) \Rightarrow DM = GM(4)$	1p
	Adunând relațiile (3) și (4) obținem că $MN = DM + BN$	1p
	c) Din $\triangle ADM \equiv \triangle AGM \Rightarrow \angle DAM = \angle GAM$	1p
	$\angle GAN = \angle BAN \Rightarrow \angle MAN = \angle DAM + \angle BAN = 90^\circ - \angle MAN$ . Deci $\angle MAN = 45^\circ$	1p
4.	<p>a) Să se arate că nu există un triunghi cu lungimile înălțimilor <math>1, \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}</math>.</p> <p>b) Se consideră trapezul isoscel <math>ABCD</math> (<math>AB \parallel CD</math>, <math>AB &gt; CD</math>). Știind că înălțimea <math>MN</math> a trapezului este egală cu linia mijlocie <math>EF</math>, arătați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.</p>	
	a) $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow a = \frac{2A}{h_a}, b = \frac{2A}{h_b}, c = \frac{2A}{h_c}$ , unde $A$ este aria triunghiului, $a, b, c$ sunt lungimile laturilor și $h_a, h_b, h_c$ sunt lungimile înălțimilor corespunzătoare acestora.	1p
	Dacă ar exista triunghiul, atunci din $a < b + c \Rightarrow \frac{2A}{1} < \frac{2A}{\sqrt{3}} + \frac{2A}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}}(1)$	1p
	Din (1), obținem că $1 < \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) < 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 + \sqrt{3} < 2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 < \sqrt{3}$ , fals.	1p
	<p>b) <b>Soluția 1</b></p> 	
	Fie $CQ \perp AB$ , $DR \perp AB$ , $R, Q \in AB \Rightarrow AQ = AR + RQ = AR + CD = \frac{AB-CD}{2} + CD = \frac{AB+CD}{2}$ Analog, obținem că $BR = \frac{AB+CD}{2}$	1p
	Dar $\frac{AB+CD}{2} = EF = MN = CQ = DR \Rightarrow AQ = CQ$ și $BR = DR$	1p
	Triunghiurile $\triangle ACQ$ și $\triangle BDR$ sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow \angle CAB = \angle DBA = 45^\circ(1)$	1p
	Fie $AC \cap BD = \{O\}$ . Din (1), rezultă că $\triangle AOB$ este dreptunghic isoscel, ca urmare $AC \perp BD$ .	1p

**Soluția 2**



Fie  $CP \parallel BD$ ,  $P \in AB$  și din  $ABCD$  trapez cu  $AB \parallel CD \Rightarrow BP \parallel CD \Rightarrow BPCD$  paralelogram  
 $\Rightarrow BP = CD$  și  $BD = CP$  (1)

**1p**

Fie  $EF \cap AC = \{G\}$ ;  $GH$  e linie mijlocie în  $\triangle APC \Rightarrow GH = \frac{AP}{2} = \frac{AB+BP}{2} = \frac{AB+DC}{2} = EF$ , dar  
 $EF = MN \Rightarrow GH = MN$  (2)

**1p**

Fie  $CQ \perp AB$ ,  $Q \in AB \Rightarrow CQ = MN$  și din (2), obținem că  $GH = CQ$  (3). Trapezul  $ABCD$  e isoscel  $\Rightarrow AC = BD$  și din (1)  $\Rightarrow CP = AC \Rightarrow \triangle ACP$  e isoscel și  $CQ$  e înălțime, ca urmare si mediană (4). Din (2) și (3), obținem că  $CQ = \frac{AP}{2}$  (5)

**1p**

Din (4) și (5), rezultă că  $\triangle ACP$  e dreptunghic în  $C$ , deci  $AC \perp PC$  dar  $PC \parallel BD \Rightarrow AC \perp BD$ .

**1p**