

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024
Clasa a VIII-a

1. (7p) Calculați $E = \sqrt{x^2 + (y + 2024)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2017)^2}$, știind că $x \in [0, 1]$ și $y - 7x + 2024 = 0$.
2. Se consideră numerele reale pozitive x, y, z . Arătați că:
- a) (4p) $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{x + y}{4}$
- b) (3p) $2x(\sqrt{y} + \sqrt{z}) + 2y(\sqrt{x} + \sqrt{z}) + 2z(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq x + y + z + (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$
3. Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm, muchia laterală $VA = 12$ cm, iar $M \in CV$ astfel încât $VM = 2 \cdot MC$. Aflați:
- a) (3p) $\sphericalangle(CV; (ABC))$;
- b) (4p) $\text{tg} \sphericalangle(MO; (ABC))$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.
4. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de lungime a . Notăm cu M și P mijloacele muchiilor AB , respectiv DD' .
- a) (3p) Demonstrați că $MP \perp A'C$.
- b) (4p) Calculați distanța dintre dreptele MP și $A'C$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.