

Barem de corectare OLM 2024 Clasa a XII-a

P1

a) Presupunem că $G = H \cup K$, cu H și K subgrupuri diferite de G și de $\{e\}$.	1p
Considerăm două elemente: x în $G \setminus H$ și y în $G \setminus K$.	1p
Cum $G = H \cup K$, rezultă că x este în K și y în H	1p
Rezultă că xy nu se găsește nici în H și nici în K , adică nu se găsește în G . Contradicție	1p
b) Da. Putem lua $(M, \cdot) = (Z, \cdot)$ care se poate scrie ca $M_1 \cup M_2$ unde $M_1 = 2Z \cup \{1\}$ și $M_2 = 2Z + 1$ sunt submonoizi ai lui M . Mai sunt și alte exemple care pot fi date.	3p

P2

a) Se știe că într-un monoid produsul a două elemente inversabile este inversabil. Rezultă că produsul unui element inversabil cu unul neinvertabil este neinvertabil.	1p
În condițiile date, a este singurul element neinvertabil al monoidului și prin urmare, xa fiind neinvertabil, coincide cu a .	1p
Un exemplu de astfel de monoid este (Z_p, \cdot) , cu p număr prim, ($a = \hat{0}$)	2p
b) Nu. Contraexemplu: $M = \{f : R \rightarrow R\}$ cu operația de compunere a funcțiilor. Elementul a este funcția nulă: $a(x) = 0, \forall x \in R$	3p

P3-Suplimentul G.M 10/2023

Ecuția din enunț se poate scrie sub forma $(xF(x))' = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \forall x \in (0, \infty)$ de unde,	1p
$xF(x) = G(x) + c$, cu $c \in R$, $G \in \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$.	1p
$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx = \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)} dx$. Facem substituția $xe^x = t \Rightarrow (x+1)e^x dx = dt$. Înlocuind, rezultă $\int \frac{dt}{t(1+t)} = \ln \frac{t}{t+1} + c$. Deci $G(x) = \ln \frac{xe^x}{xe^x+1} + c$, de unde $F(x) = \frac{1}{x} G(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{xe^x}{xe^x+1} + \frac{c}{x}$.	3p
Din condiția $F(1) = 1 - \ln(1+e)$ rezultă că $c = 0$. Deci, $F(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{xe^x}{xe^x+1}$.	1p
Deci, $f(x) = F'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{xe^x}{xe^x+1} + \frac{x+1}{x^2(xe^x+1)}$.	1p

P4

Calculând integrala, se obține $2a - 6 + 2 \ln(5-a)$,	4p
deci trebuie rezolvată ecuația $2a - 6 + 2 \ln(5-a) = \ln 4$. Se observă că $a = 3$ este soluție, iar unicitatea rezultă din monotonia funcției din membrul stâng (pe baza pozitivității derivatei).	3p