

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapă locală, 10.02.2024

Filiera teoretică - Științele naturii

Clasa a XI-a

1. Patru orașe sunt reprezentate pe o hartă sub forma unui patrulater  $ABCD$ . Un avion utilitar patrulează zilnic între cele patru orașe. Pilotul constată că, dacă ar folosi un reper cartezian  $xOy$ , atunci  $A(-7, 1)$ ,  $B(-5, 5)$ ,  $C(1, -3)$  și  $D(0, -5)$ .

a)(3p) Aflați ce suprafață există între cele 4 orașe.

b)(4p) Determinați pe dreapta care trece prin orașele  $C$  și  $D$  un punct de alimentare al avionului astfel încât suma distanțelor de la acesta la orașele  $A$  și  $B$  să fie minimă.

2.(7p) Se consideră matricea  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ ,  $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i > j \\ (-1)^{i+j} \cdot C_j^i, & \text{dacă } i < j \end{cases}$ , unde  $C_j^i$  reprezintă numărul

submulțimilor cu  $i$  elemente ale unei mulțimi cu  $j$  elemente. Calculați  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3.

a)(3p) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 \sin 2x + 12 \cos 2x + 1$ . Aflați mulțimea valorilor funcției  $f$ .

b)(4p) Se consideră funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Determinați numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât asimptota la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$  să fie paralelă cu dreapta de ecuație  $y = 2x + 1$ , iar dreapta  $y = 1$  să fie asimptotă la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ .

4.(7p) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{a - 2\sqrt{2-x}}{x-1}, & x < 1 \\ bx + c \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Determinați numerele

reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.