

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 10.02.2024

Filiera tehnologică

Clasa a X-a

1. Se consideră expresia $E(x) = \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

a) (4p) Demonstrați că $E(x) \in \mathbb{Q}$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$.

b) (3p) Calculați $E(2 - \sqrt{3})$.

2. Se consideră relațiile $45^a = 5$ și $45^b = 3$ cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) (2p) Determinați numerele reale a și b .

b) (5p) Calculați $16^{\frac{1-a-b}{1-a}}$.

3. Fie $z_n = \left(\frac{19+7i}{9-i} \right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) (3p) Verificați dacă $2|z_2$.

b) (4p) Arătați că $z_{n+2} = 4z_{n+1} - 5z_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4. (7p) Cantitatea de medicament, în miligrame, aflată în circuitul sanguin al unui pacient după t minute de la momentul administrării acestuia este dată de valorile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 200 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$. Arătați că, după 16 ore și 40 de minute, cantitatea de medicament din sângele pacientului este mai mică decât 2^{-6} mg. (Se poate folosi aproximarea $e \approx 2,7$).

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.