

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 10.02.2024

Filiera tehnologică

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea  $G = \{x \in \mathbb{R} / x = a + b\sqrt{5}, a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1\}$ .

a) (2p) Găsiți patru exemple de numere din  $G$ .

b) (5p) Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian, unde „ $\cdot$ ” reprezintă înmulțirea numerelor reale.

2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 12}{\sqrt{x} - 2} - 25, & x \in (0, 4) \\ 3, & x = 4 \\ \frac{6}{\ln(x-3) + 2}, & x \in (4, \infty) \end{cases}$ .

a) (4p) Arătați că funcția  $f$  admite primitive și orice primitivă a sa este concavă pe  $(4, \infty)$ .

b) (3p) Calculați  $\int \frac{f(x) + 25}{x + 3} dx, x \in (0, 4)$ .

3. Se cunoaște faptul că valoarea de capital al unui *flux de venituri continue* este

$$S(x) = \int_0^x f(t) \cdot e^{-rt} dt, \text{ unde}$$

$f(t)$  = rata veniturilor reprezentată prin unități monetare pe an, în orice moment  $t$  de ani

$r$  = rata dobânzii pe an

$x$  = numărul de ani pe care se calculează fluxul.

a) (3p) Știind că  $f(t) = t^2, t \in [0, \infty)$  și  $r = 2$ , calculați valoarea de capital a fluxului de venituri  $f(t)$  pe o perioadă de  $x = 3$  ani.

b) (4p) Determinați rata dobânzii pe o perioadă de 5 ani pentru fluxul de venituri  $f(t) = e^{-t}, t \in [0, \infty)$  știind că valoarea de capital este  $S(5) = (1 - e^{-20})(1 + r)^{-1}$ .

4. (7p) Fie legea de compoziție  $x \circ y = 5xy + 5x + 5y + 4$  unde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dacă  $n \in \mathbb{N}, n \geq 7$ , determinați ultimele șapte cifre ale numărului  $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ n$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.