

Barem de corectare OLM 2024 Clasa a IX-a

P1 – autor Brodețchi Mircea

a) $77^2 = 5929 < 6073 < 6074 < 6084 = 78^2$	1p
$E(2024) = \left\lfloor \sqrt{6073} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{6074} \right\rfloor = 77 - 77 = 0$.	1p
b) Fie $\left\lfloor \sqrt{3n+1} \right\rfloor = p$, $p \in \mathbb{N}$. Obținem: $p \leq \sqrt{3n+1} < p+1$	1p
$p^2 \leq 3n+1 < p^2 + 2p + 1 \Rightarrow p^2 + 1 \leq 3n+2 < (p+1)^2 + 1$	1p
Deoarece $3n+2 \in \mathbb{N}$, obținem: $p^2 < 3n+2 \leq (p+1)^2$	1p
Dar $3n+2$ nu este pătrat perfect și obținem: $p^2 < 3n+2 < (p+1)^2$ și $\left\lfloor \sqrt{3n+2} \right\rfloor = p$	1p
Deci, $E(n) = p - p = 0$, care nu depinde de n .	1p

P2 – autor Pop Alin

a) $a = 5 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + \dots + 2 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+2} + 10^{n+3} + \dots + 10^{2n+1}$	1p
$a = 5 + 20(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^n) + 10^{n+2}(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})$	1p
$a = 5 + 20 \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 10^{n+2} \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{2(n+1)} + 10 \cdot 10^{n+1} + 25}{9} = \left(\frac{10^{n+1} + 5}{3} \right)^2 = \underbrace{33 \dots 35^2}_{n \text{ ori}}$	2p
b) Dacă există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^4 = a$, atunci x este de forma $10b+5$, cu $b \in \mathbb{N}^*$.	1p
Obținem: $x^2 = (10b+5)^2 = 100b^2 + 100b + 1 = 100b(b+1) + 25 = 100c + 25$, $c \in \mathbb{N}^*$	1p
și $x^4 = (100c+25)^2 = 10000c^2 + 5000c + 625 = 1000d + 625$, $d \in \mathbb{N}^*$. Deci ultimele trei cifre ale lui x^4 sunt 625 și, prin urmare, nu există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^4 = a$.	1p

P3 – manual

a) Demonstrarea inegalității prin metoda inducției matematice: $P(1): (1+x) \geq 1+x$ adevărată	1p
Presupunem $P(k): (1+x)^k \geq 1+kx$, $k \in \mathbb{N}$ adevărată și demonstrăm $P(k+1): (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ adevărată.	1p
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$	1p
$(1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$, pentru orice $x \in (-1; +\infty)$ și $k \in \mathbb{N}$	1p
b) Înlocuind pe x cu $\frac{3}{2}$ și cu $\frac{3}{4}$ în inegalitatea de la punctul a), obținem: $\left(\frac{5}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{3n}{2}$ și $\left(\frac{7}{4}\right)^n \geq 1 + \frac{3n}{4}$	2p
Prin adunarea celor două inegalități, obținem: $\left(\frac{5}{2}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^n \geq 2 + \frac{9n}{4}$	1p

P4 – autor Gheorghe Iurea și Gabriel Popa (GM 10/2023); soluție Pop Alin

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (mijlocul lui BC) și T punctul diametral opus lui M în acest cerc.	1p
Se obțin relațiile: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MT}$	1p
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MT}$	1p
$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MT} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MT}$	2p
Rezultă $ \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MT} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC	1p
Astfel, deducem că punctul P aparține cercului de centru A și rază $2R$.	1p