

Barem de corectare OLM 2024 Clasa a XI-a

P1

Scăzând linia 1 din linia 2 și 3, apoi coloana 3 din coloana 1 și 2	2p
$D(n) = \begin{vmatrix} n^2 - 16 & n^4 - 16 & 17 \\ n - 4 & n^2 - 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n - 4)(n^2 - 4) \cdot \begin{vmatrix} n + 4 & n^4 + 4 & 17 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= n(n - 1)(n - 2)(n + 2)(n - 4)$	2p
<p>Dacă $n = 2k$ atunci $D(2k) = 2^4(k - 2)(k - 1)k(k + 1)(2k - 1)$</p> <p>Cum $(k - 2)(k - 1)k(k + 1) : 4! = 24 \Rightarrow D(n) : 384$.</p>	3p

P2

a) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, făcând substituția $x \rightarrow 2x$ se obține $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{8x^3}$	1p
$L = \frac{1}{4}L + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3}$	1p
$3L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3 \cdot (1 + \cos x)} \Rightarrow L = \frac{1}{6}$	1p
b) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(n! \cdot \frac{1 - \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin nx}{nx}}{x^2} \right)$	1p
$L = n! \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right)}{x^2} \right)$	1p
$L = n! \cdot \left(\frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 2x}{2x} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right)}{x^2} \right)$	1p
$L = n! \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right)}{x^2} \right) \Rightarrow L = \frac{n!}{6} \cdot (1 + 2^2 + \dots + n^2) \Rightarrow$ $L = \frac{n(2n + 1)(n + 1)!}{36}$	1p

P3

a) $A^1 = A + 0 \cdot I_3$ și $A^2 = A + 2 \cdot I_3$, deci $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$	2p
Se demonstrează prin inducție că $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3$ și se găsesc recurențele $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$	2p
<p>b) Folosind dezvoltarea $A^n = (B - I_3)^n$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sau recurențele liniare de la punctul a)</p> <p>se găsește $a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$ și $b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ și astfel limita cerută este $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.</p>	3p

P4 – problema S:L23.266, G.M.10/2023)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - a) + a\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - a) + [a] + \{a\}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - a) + \{a\}\}$	2p
Folosim acum faptul că începând cu un anumit rang șirul $x_n = (a_n - a) + \{a\}$ devine pozitiv și subunitar, deci $\{x_n\} = x_n$ astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - a) + \{a\}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n - a) + \{a\}) = 0 + \{a\} = \{a\}$.	2p
b) Să presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \in \mathbb{Z}$	1p
Dacă șirul este monoton descrescător atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - k) = 0$.	1p
Dacă șirul este monoton crescător atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - k + 1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - k + 1) = 1$.	1p
Dar există șiruri care <u>nu</u> sunt monotone, de exemplu $a_n = k + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pentru care <u>nu</u> există $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$. Cu alte cuvinte, nu se poate da un răspuns exact la această întrebare.	1p