

# Barem de corectare OLM 2024 Clasa a X-a

## P1

a) Pentru $x \geq 3$ se obține $\left  \sqrt{2^x - 8} - 3 \right  + \left  \sqrt{2^x - 8} + 3 \right  = 6$	1p
Explicitând modulele se obține că orice $x \in [3, \log_2 17]$ este soluție a ecuației	1p
Pentru $x \in (\log_2 17, +\infty)$ ecuația nu are soluții	1p
b) $x = 32$ este soluție	2p
Cum $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ , $f(x) = \lg(\sqrt{2x} + \sqrt[5]{x})$ este funcție strict crescătoare și $g: (0, +\infty) \rightarrow R$ , $g(x) = 2 - \log_{2024}(x^2 + 1000)$ este funcție strict descrescătoare, ecuația are soluție unică	2p

## P2

Rezolvând ecuația se obțin afixele punctelor $A$ și $C$ , $z_A = 2 + 2i$ , respectiv $z_C = -1 - i$	2p
$AC =  z_C - z_A  = 3\sqrt{2}$ , deci $AB = 3$	2p
$ z_B - z_A  =  z_B - z_C  = 3$ , $z_B = 2 - i$ , $z_D = -1 + 2i$ sau $z_B = -1 + 2i$ , $z_D = 2 - i$	3p

## P3- adaptare manual

a) Pentru $x \in (1, +\infty)$ funcția este strict crescătoare pentru orice $m \in R$ și pe $(-\infty, 1]$ funcția este strict crescătoare pentru $m \in (-2, +\infty)$ .	2p
Cum $\text{Im } f = (-\infty, 2] \cup (m + 2, +\infty)$ , funcția este injectivă și nu este surjectivă pentru $m \in (0, +\infty)$	2p
b) Funcția $f$ este surjectivă și nu este injectivă dacă $\text{Im } f = (-\infty, 2] \cup (m + 2, +\infty) = R$ și $(-\infty, 2] \cap (m + 2, +\infty) \neq \emptyset$ , deci $m \in (-\infty, 0)$ .	3p

## P4- GM 11/ 2023

a) $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi $\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$	1p
Din inegalitatea mediilor obținem că $\frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$ ,	2p
b) Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1, atunci $(\lg(b_n))_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi	2p
Din inegalitatea mediilor obținem $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$ și prin logaritmare $\lg\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n}$	1p
Din punctul a) rezultă inegalitatea care trebuie demonstrată	1p