



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etape locală, SĂLAJ, 10.02.2024

XII. osztály

1. Feladat

Tekintsd az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot és a következő halmazt

$$G = \left\{ X_a \in M_2(\mathbf{R}) \mid X_a = I_2 + aA, a > -\frac{1}{2} \right\}.$$

(3p) a) Igazold, hogy G zárt részhalmaza az $M_2(\mathbf{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve, majd bizonyítsd be, hogy a (G, \cdot) algebrai struktúra Abel-féle csoport.

(2p) b) Bizonyítsd be, hogy az $f : G \rightarrow \mathbf{R}, f(X_a) = \ln(2a + 1)$ függvény egy izomorfizmus a (G, \cdot) és $(\mathbf{R}, +)$ csoportok között.

(2p) c) Számítsd ki a szorzatot: $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}}, n \in \mathbf{N}^*.$

2. Feladat

(7p) Legyen G egy multiplikatív csoport, amelyben érvényesek a következő tulajdonságok:

$$(xy)^3 = x^3 y^3, (xy)^4 = x^4 y^4, (xy)^5 = x^5 y^5, \forall x, y \in G.$$

Igazold, hogy a G csoport kommutatív.

3. Feladat

(3p) a) Számítsd ki $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx, x \in (0, \infty).$

(SGM 10/2023)

(4p) b) Határozd meg az $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - x^5}{1 + x^9}$ függvény primitív függvényeit.

(GM 9/2023)

4. Feladat

(7p) Mutasd ki, hogy az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ függvénynek nincsenek primitív függvényei az \mathbf{R} halmazon.

Munkaidő: 3 óra.

Mindegyik feladatra 7 pont jár.