



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Subiectul 1

Se consideră $S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$, unde n este un număr natural nenul.

(2p) a) Arătați că pentru orice n număr natural nenul $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

(5p) b) Aflați câte numere naturale nenule $n \leq 2024$ există, astfel încât S_n să fie număr rațional.

Barem de corectare.

a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 2p

b) $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 1p

$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{n+1} \in \mathbb{Q}$, deci $n+1$ este pătrat perfect1p

Fie $n+1 = k^2, k \in \mathbb{N}$.

Cum

$$1 \leq n \leq 2024 \Rightarrow 2 \leq n+1 \leq 2025 \Rightarrow 2 \leq 2^2 \leq n+1 \leq 45^2 \Rightarrow 2^2 \leq k^2 \leq 45^2 \Rightarrow k = \overline{2, 45}.$$

.....2p

Atunci k are 44 de valori, deci există 44 de numere naturale nenule n pentru care S_n este număr rațional.1p

Subiectul 2

Se consideră numerele raționale nenule a, b, c și d .

Dacă $\frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b}$, arătați că $abcd < 0$.

Barem de corectare.

Putem scrie $a + b + c + d = \frac{b + c + d}{2} = \frac{c + d + a}{3} = \frac{d + a + b}{4} = k$, de unde

(1) $a + b + c = k$, (2) $b + c + d = 2k$, (3) $c + d + a = 3k$ și (4) $d + a + b = 4k$ 2p

Din (1) și (2) obținem $a = -k$, din (1) și (3) $b = -2k$, din (1) și (4) $c = -3k$, iar prin înlocuire în (1) găsim $d = 7k$ 3p

Atunci $abcd = -42k^4$, care, evident, este negativ. 2p

Subiectul 3

(7p) Fie ABCD trapez cu $AB \parallel CD$ și $CD = 2AB$. Considerăm punctul M mijlocul segmentului (CD) și $AC \cap BM = \{P\}$. Știind că aria trapezului ABCD este egală cu 36 cm^2 , calculați aria triunghiului PMC.

Barem de corectare.

Notăm $AB = x \Rightarrow CD = 2x$

$\left. \begin{array}{l} AB \parallel MC \\ AB = MC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{AMCB paralelogram} \dots\dots\dots 1p$

$A_{\Delta PMC} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCM} \dots\dots\dots 2p$

Notăm cu $d(AB, CD) = h$.

$\frac{A_{ABCM}}{A_{ABCD}} = \frac{x \cdot h}{3x \cdot h} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 1p$

$A_{ABCM} = \frac{2}{3} \cdot A_{ABCD}$

$A_{ABCM} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 2p$

$A_{\Delta PCM} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 1p$

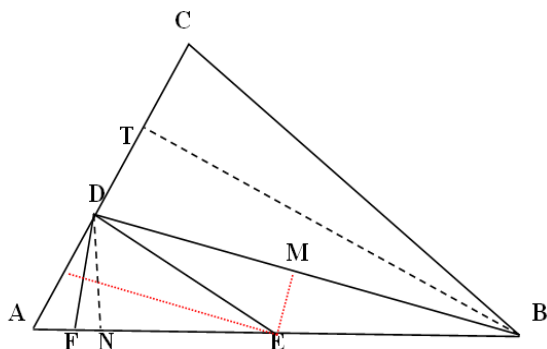
Subiectul 4

Fie triunghiul ABC în care $\angle BAC = 60^\circ$ și $\angle ABC = 45^\circ$. Considerăm punctele $D \in (AC)$ și $E, F \in (AB)$ astfel încât $\angle BDC = 75^\circ$, $BE = DC = 2 \text{ cm}$, $\angle AFD = 105^\circ$.

(4p) a) Determinați lungimea segmentului DE.

(3p) b) Dacă (EM este bisectoarea unghiului $\angle BED$ cu $M \in BD$, (EN este bisectoarea unghiului $\angle AED$ cu $N \in AD$ iar $FD \cap EN = \{P\}$, arătați că patrulaterul DMEP este dreptunghi.

Barem de corectare.



a) Calculând măsura $\sphericalangle ACB$ obținem $\sphericalangle ACB = 75^\circ$.

Din ipoteză, $\sphericalangle BDC = 75^\circ$, deci $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD = 75^\circ$, deci $\triangle BCD$ isoscel și $\sphericalangle CBD = 30^\circ$ iar $\sphericalangle DBA = 15^\circ$1p

In $\triangle AFD$, $\angle ADF = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ = 15^\circ$. Deci $\angle FDB = 180^\circ - \angle ADF - \angle BDC = 90^\circ$ 1p

Fie punctul $T \in DC, TC = TD$, deci BT mediană în $\triangle BCD$ isoscel, așadar, BT înălțime și bisectoare în $\triangle BCD \Rightarrow \angle TBD = 15^\circ$.

Fie $DN \perp AB$, $N \in AB$ și avem $\triangle TDB \equiv \triangle DNB(I.U) \Rightarrow DT = DN = \frac{DC}{2} = 1\text{cm}$.

În $\triangle FDB$, dr, DN înălțime, aplicând $T. 15^o \Rightarrow DN = \frac{BF}{4} \Rightarrow BF = 4cm$

Dar $BE = DC = 2\text{cm}(ip) \Rightarrow FE = BE = 2\text{cm} \Rightarrow E$ mijlocul segmentului BF 1p

În $\square DBF$ dreptunghic în $\square FDB, DE$ mediană, deci $DE = \frac{BF}{2} = BE \Rightarrow DE = 2cm. 1p$

b) EM bisectoare în $\square DEB$ isoscel, deci va fi și înălțime $\Rightarrow EM \perp BD$

$$\square FDB = 90^\circ \Rightarrow FD \perp BD$$

Deci $EM \sqsubseteq DF, P \in DF \Rightarrow EM \sqsubseteq DP(1)$ 1p

EP bisectoarea $\angle DEA = 30^\circ \Rightarrow \angle DEP = \angle DBE = 15^\circ$ (\angle alt.int), DE secantă, deci

EP \square *BD*, *M* \in *BD* \Rightarrow *EP* \square *MD*(2)1p

Din (1) și (2) avem $DMEP$ paralelogram, cu $EM \perp DM$, deci $DMEP$ dreptunghi.1p