



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

Clasa a V-a

#### Barem de corectare

##### Subiectul 1

(3p) a) Comparați numerele  $a$  și  $b$  unde:

$$a = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)^{2023} \text{ și } b = 9^{2023} \cdot 7^{4046}$$

(4p) b) Dacă  $a = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023}$

și  $b = [(2^3)^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}] : (2^{15} - 7^{15} + 5^6)$ , calculați ultima cifră a numărului  $a^b$ .

#### Barem de corectare:

a)  $a = (1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216)^{2023} = 441^{2023}$  ..... 1p

$b = (3^2)^{2023} \cdot 7^{4046} = 3^{4046} \cdot 7^{4046} = 21^{4046}$  ..... 1p

$b = (21^2)^{2023} = 441^{2023}$ , deci  $a = b$  ..... 1p

b)  $a = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} =$  ..... 1p

$= 2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} =$

$= 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} = \dots = 2^{2023} + 2^{2023} = 2 \cdot 2^{2023} = 2^{2024}$  1p

$b = [(2^3)^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}] : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) = (2^{15} - 7^{15} + 5^6) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) = 1$ ..... 1p

$U(a^b) = U(2^{2024})^1 = U(2^{2024}) = U(2^4) = 6$ ..... 1 p

##### Subiectul 2

(3p) a) Aflați valoarea lui  $x$  din egalitatea:  $[(x + 2023) \cdot 2023 - 2023] : 2023 = 2024$ .

(4p) b) Suma a patru numere este 2024. Aflați cele patru numere, știind că, dacă adunăm 20 la primul număr, scădem 20 din al doilea număr, împărțim la 20 al treilea număr, obținem de fiecare dată cel de-al patrulea număr.

#### Barem de corectare:

a)  $[(x + 2023) \cdot 2023 - 2023] : 2023 = 2024$

$[(x + 2023) \cdot 2023 - 2023] = 2024 \cdot 2023$  ..... 1p

$(x + 2023) \cdot 2023 = 2024 \cdot 2023 + 2023$

$$(x + 2023) \cdot 2023 = 2025 \cdot 2023 \dots\dots\dots 1p$$

$$x + 2023 = 2025$$

$$x = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \ a + b + c + d = 2024 \dots\dots\dots 1p$$

$$a + 20 = d \Rightarrow a = d - 20 \dots\dots\dots 1p$$

$$b - 20 = d \Rightarrow b = d + 20 \Rightarrow 23 \cdot d = 2024 \Rightarrow d = 88 \dots\dots\dots 1p$$

$$c : 20 = d \Rightarrow c = d \cdot 20 \Rightarrow c = 1760 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin înlocuire se obține } a = 68, b = 108 \dots\dots\dots 1p$$

### Subiectul 3

(3p) a) Aflați restul împărțirii numărului  $N = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 15$  la numărul 5.

(4p) b) Dacă  $a, b, c$  sunt numere naturale astfel încât  $a + b = 8$ ,  $b + c = 3$ ,  $c + d = 10$  stabiliți dacă numărul  $n = 7a + 15b + 10c + 2d$  este pătrat perfect.

(Gazeta Matematică)

### Barem de corectare:

$$a) \ N = 2^n \cdot 2 \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 15 \dots\dots\dots 1p$$

$$= 2^n \cdot 3^n (2 + 3) + 15 \dots\dots\dots 1p$$

$$= 5(2^n \cdot 3^n + 3), \text{ deci restul este } 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \ a + b = 8 \mid \cdot 7 \Rightarrow 7a + 7b = 56$$

$$b + c = 3 \mid \cdot 8 \Rightarrow 8b + 8c = 24$$

$$c + d = 10 \mid \cdot 2 \Rightarrow 2c + 2d = 20 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Însumând obținem } n = 7a + 15b + 10c + 2d = 56 + 24 + 20 = 100 = 10^2 \text{ pp} \dots\dots\dots 1p$$

### Subiectul 4

Un număr natural se numește *special* dacă are trei cifre iar împărțindu-l la numărul format din ultimele două cifre ale sale obținem câtul 4 și restul cu 8 mai mic decât împărțitorul.

(4p) a) Determinați toate numerele naturale *speciale*.

(3p) b) Determinați cel mai mic număr natural nenul  $n$ , astfel încât produsul dintre acesta și suma tuturor numerelor naturale *speciale* să fie pătrat perfect.

### Barem de corectare:

$$a) \text{ Fie } \overline{abc} \text{ număr special. Aplicând T.Î.R obținem } \overline{abc} = 4 \cdot \overline{bc} + \overline{bc} - 8, \overline{bc} - 8 < \overline{bc} \dots 1p$$

$$100 \cdot a + \overline{bc} = 5 \cdot \overline{bc} - 8 \dots\dots\dots 1p$$

$$100 \cdot a = 4 \cdot \overline{bc} - 8 \Rightarrow 25 \cdot a = \underbrace{\overline{bc} - 2}_{\text{număr de două cifre}} \quad \text{deci } a < 4 \dots\dots\dots 1p$$

Dacă  $a = 1$  atunci  $\overline{bc} = 27$

Dacă  $a = 2$  atunci  $\overline{bc} = 52$

Dacă  $a = 3$  atunci  $\overline{bc} = 77$

Atunci numerele speciale sunt 127, 252, 377 ..... 1p

b) Suma numerelor speciale =  $127 + 252 + 377 = 756$  atunci căutăm cel mai mic număr  $n$ , natural nenul, astfel încât  $n \cdot 756$  să fie pătrat perfect ..... 1p

$756 = 4 \cdot 9 \cdot 21$  iar 4 și 9 sunt pătrate perfecte ..... 1p

deci  $n = 21$  atunci  $n \cdot 756 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 21^2 = (2 \cdot 3 \cdot 21)^2 = 126^2$  p.p. .... 1p