



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

IX. Osztály

1 Tétele

(3p) a) Legyen $E(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 18x + 81}$ kifejezés, ahol $x \in [1, 2]$.

Határozzátok meg $E(x)$ legkisebb és legnagyobb értékét.

(4p) b) Adott az $N = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám. Oldjátok meg az egész számok halmazán az $\left[\frac{x+1}{2}\right] = 2024[N]$ egyenletet, ahol $[t]$ a t szám egész részét jelenti.

2 Tétele

Igazoljátok, hogy ha $ab+bc+ac = abc$, akkor $\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq 9, \forall a, b, c > 0$.

3 Tétele

(4p) a) Bizonyítsátok be a következő egyenlőséget:

$$P(n): 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 3}_{\text{denari}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}, n \in \mathbb{N}^*.$$

(3p) b) Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ egy számtani haladvány, melynek tagjai természetes számok úgy, hogy $a_1 = 1$. Igazoljátok, hogy létezik $k > 1$ úgy, hogy a_k négyzetszám legyen és a számtani haladvány végtelen tagot tartalmaz, amelyek négyzetszámok.

4 Tétele

Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, $\{O\} = AC \cap BD$.

(5p) a) Igazoljátok, hogy az AOB , BOC , COD és DOA háromszögek súlypontjai egy paralelogrammát határoznak meg.

(2p) b) Bizonyítsátok be, hogy az O pont a $G_1G_2G_3G_4$ paralelogramma középpontja akkor és csak akkor, ha fennáll az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ összefüggés.

Munkaidő: 3 óra.

Minden tétel 7 pontot ér.