



**Barem de notare și evaluare**  
**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Neamț**  
**03.02.2024**  
**Clasa a V -a**

**Subiectul 1**

Aflați câte cifre au următoarele numere naturale:

a)  $a = 510152025 \dots 725730735 \dots 200020052010$ ;

b)  $b = 3^2 \cdot 8^{81} \cdot 7^2 \cdot 25^{122}$ .

**Soluție:**

a) Avem: un număr de o cifră

$(95 - 5) : 5 = 18$  numere de 2 cifre .....1p

$(995 - 95) : 5 = 180$  numere de 3 cifre

$(2010 - 995) : 5 = 203$  numere de 4 cifre.....1p

Deci  $a$  are 1389 de cifre.....1p

b)  $b = 3^2 \cdot 8^{81} \cdot 7^2 \cdot 25^{122}$

$b = 3^2 \cdot 2^{243} \cdot 7^2 \cdot 5^{244}$  .....1p

$b = 21^2 \cdot 5 \cdot 2^{243} \cdot 5^{243}$

$b = 2205 \cdot 10^{243}$  .....2p

$b = 2205 \underbrace{000 \dots 000}_{\text{de 243 ori}}$

Deci  $b$  are 247 cifre. ....1p

**Subiectul 2**

a) Arătați că  $a = [(2^8 \cdot 2^{12})^7 : (2^6)^{23}]^{53} + 13^0 + (5 \cdot 5^2 \cdot 5^3)^7 : 25^{21} + 2^{3^0}$  nu este pătrat perfect.

b) Aflați cel mai mic număr natural nenul  $b$  astfel încât  $a \cdot b$  să fie cub perfect, unde

$1 + a + 3a + 5a + \dots + 99a + 1999 = 2a + 4a + 6a + \dots + 100a$

**Soluție**

a)  $a = (2^{140} : 2^{138})^{53} + 1 + 5^{42} : 5^{42} + 2$

$a = 2^{106} + 1 + 1 + 2$

$a = 2^{106} + 4$  .....2p

$U(a) = U(2^{106} + 4) = 8$

Deci  $a$  nu este pătrat perfect.....1p

b)

$2000 + a(1 + 3 + 5 + \dots + 99) = 2a(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$

$2000 + 2500a = 2550a \Rightarrow a = 40$ .....2p

$a \cdot b = 40 \cdot b = 2^3 \cdot 5 \cdot b$  .....1p

Deci cea mai mică valoare pe care o poate lua  $b$  astfel încât  $2^3 \cdot 5 \cdot b$  să fie cub perfect este

$$b = 5^2 = 25. \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 3**

Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4. Aflați numărul.

**Soluție:**

$$\overline{abc} : \overline{cba} = 2 \text{ rest } 100 \Rightarrow \overline{abc} = 2 \cdot \overline{cba} + 100 \dots\dots\dots 1p$$

$$100a + 10b + c = 2(100c + 10b + a) + 100 \dots\dots\dots 1p$$

$$100a + 10b + c = 200c + 20b + 2a + 100 \dots\dots\dots 1p$$

$$a - c = 4 \Rightarrow a = c + 4$$

$$\Rightarrow 101c + 400 + 10b = 202c + 20b + 108 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 101c + 10b = 292 \Rightarrow \overline{cbc} = 292 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow b = 9, c = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow a = c + 4 \Rightarrow a = 6$$

$$\text{Deci numărul căutat este } 692 \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 4**

Paginile unei cărți sunt numerotate de la 1 la 336. Din această carte se rup la întâmplare 111 foi.

Arătați că:

- Suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10.
- Produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

**Soluție:**

a) În total cartea are  $336:2=168$  foi.....1p

Numărul foilor rămase este  $168 - 111 = 57$ .....1p

Suma numerelor folosite pentru numerotarea unei foi este un număr impar. ....1p

Astfel, avem o sumă de 57 de numere impare, care este un număr impar, deci nu se împarte exact la 10 (care este număr par). ....1p

b) În șirul 1;2;3;...336 avem exact 112 numere care se împart la 3

$(3 \cdot 1; 3 \cdot 2; 3 \cdot 3; \dots 3 \cdot 112)$  .....1p

Deoarece rupem 111 pagini, rămâne o pagină al cărei număr se împarte cu 3.....1p

Produsul numerelor de pe foile rămase va avea forma  $3 \cdot k$ ,  $k$  număr natural, deci se împarte exact cu 3. ....1p