

**Barem de notare și evaluare**  
**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Neamț**  
**03.02.2024**  
**Clasa a VIII -a**

**Subiectul 1**

Se consideră mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \leq a\}$  și  $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z}, \text{ unde } n \in \mathbb{Z}\right\}$ .

a) Determinați elementele mulțimii B.

b) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  pentru care  $A \cap B$  are exact două elemente.

**Soluție:**

Determinarea lui  $n \in \mathbb{Z}$ : -3, -1, 0, 2 2p

Determinarea elementelor mulțimii  $B = \{-1, 1, 2, 4\}$  1p

Dacă  $a < 0$  sau  $a = 0$  atunci  $\text{card } A = 0$  sau  $\text{card } A = 1$ . Deci acest caz nu este convenabil 1p

Dacă  $a = 1$  atunci  $A = \{1, 2, 3\}$  și  $\text{card } A \cap B = 2$  1p

Dacă  $a \geq 2$  atunci 1, 2 și 4  $\in A$  și atunci  $\text{card } A \cap B \geq 3$  2p

**Subiectul 2**

Fie numerele reale  $x$  și  $y$  care verifică relația  $5 \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x + 2 \leq 0$ .

Demonstrați că cea mai mare valoare a expresiei  $x - \frac{1}{3} \cdot y$  este mai mică decât  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ .

**Soluție:**

$(2 \cdot x - 3)^2 + (x - y)^2 \leq 7$  2p

$|2 \cdot x - 3| \leq \sqrt{7}$  și  $|x - y| \leq \sqrt{7}$  1p

$\frac{3-\sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{7}}{2}$  și  $\frac{3-3\sqrt{7}}{2} \leq y \leq \frac{3+3\sqrt{7}}{2}$  2p

Valoarea maximă a expresiei  $x - \frac{1}{3} \cdot y$  este  $1 + \sqrt{7}$  1p

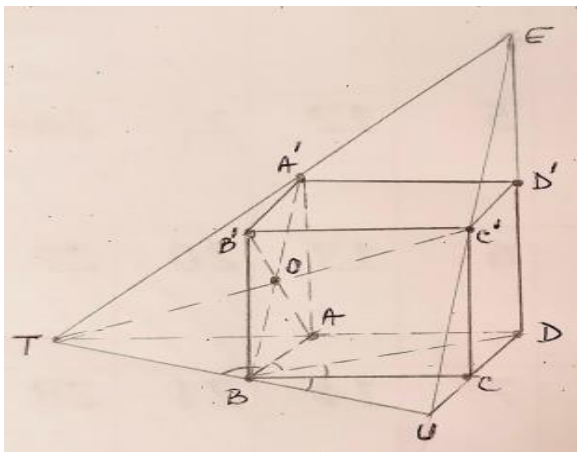
Demonstrarea inegalității  $1 + \sqrt{7} < \sqrt{2} + \sqrt{5}$  1p

**Subiectul 3**

Fie  $AB C D A' B' C' D'$  un cub și E simetricul lui D față de  $D'$ . Se notează cu T și U intersecțiile dreptelor  $EA'$  și  $EC'$  cu planul (ABC). Se cer:

- Demonstrați că T, B și U sunt coliniare;
- Demonstrați că T, O și  $C'$  sunt coliniare, unde O este centrul feței  $ABB'A'$ ;
- Demonstrați că intersecția planelor  $(EA'B)$  și  $(ADC')$  este dreapta  $TC'$ ;
- Determinați unghiul dreptelor  $TC'$  și  $AD'$ .

**Soluție:**



a)  $(ABC) \cap (EDA) = AD \Rightarrow T \in AD$

Analog rezultă că  $U \in DC$

În  $\triangle EDT$ :  $(A'D')$  linie mijlocie  $\Rightarrow DA = AT = AB \Rightarrow m(\widehat{ABT}) = 45^\circ$

Analog rezultă  $m(\widehat{CBU}) = 45^\circ$

$m(\widehat{TBU}) = m(\widehat{ABT}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBU}) = 180^\circ \Rightarrow T, B \text{ și } U \text{ sunt coliniare} \dots \dots \dots 2p$

b)  $\triangle TEU$ :  $A'B \parallel EU$  (linie mijlocie),  $C'$  mijlocul lui  $(EU)$ ,  $O$  mijlocul lui  $(A'B)$  de unde rezultă că  $T, O$  și  $C'$  sunt coliniare  $\dots \dots \dots 2p$

c)  $TC' \subset (ETU) = (EA'B)$ ,  $OC' \subset (ADC') = (ADC'B')$  și cum  $T, O$  și  $C'$  sunt coliniare obținem că  $(EA'B) \cap (ADC') = TC' \dots \dots \dots 1p$

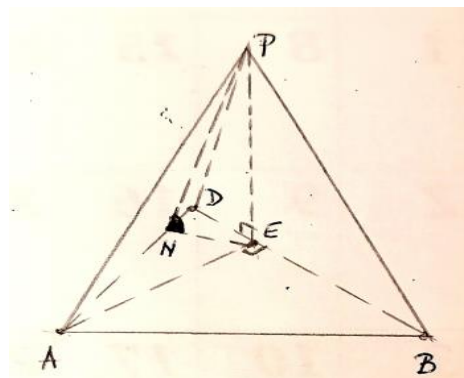
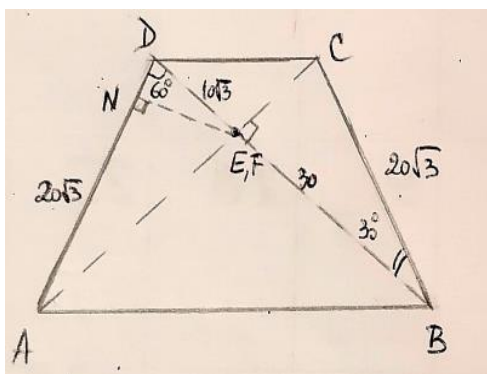
d)  $AD' \parallel BC' \Rightarrow (\widehat{TC'}, \widehat{AD'}) = (\widehat{TC'}, \widehat{BC'}) = \widehat{TC'B} = \widehat{C'TE} = 30^\circ$  deoarece  $TC'$  este mediană (și bisectoare) în triunghiul echilateral  $TEU \dots \dots \dots 2p$

#### Subiectul 4

Fie  $ABCD$  un patrulater convex cu  $AD = BC = 20\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $DB = 10(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$ ,

$m(\widehat{ADB}) = 60^\circ$ ,  $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$ . Se îndoaie foaia de hârtie după diagonala  $(BD)$  până când planele triunghiurilor  $ABD$  și  $CBD$  devin perpendiculare. Notăm cu  $P$  noua poziție a punctului  $C$ . Să se calculeze tangenta unghiului diedru dintre planele  $(ADP)$  și  $(ABD)$ .

**Soluție:**



Fie  $E$  și  $F$  proiecțiile lui  $A$  și  $C$  pe  $BD$ .



În  $\triangle ADE$  se obține  $DE = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ , iar în  $\triangle CBF$  se obține  $BF = 30 \text{ cm}$ , deci  $DE+BF=DB$ . Se deduce de aici că  $E=F$ .....2p

Unghiul diedru al planelor (ABD) și (PBD) este  $\widehat{PEA}$  și cum planele sunt perpendiculare, acest unghi este drept și  $PE \perp (ABD)$ .....1p

Fie N proiecția lui E pe AD.

$AD \perp EN, AD \perp PE \Rightarrow AD \perp (PNE) \Rightarrow AD \perp PN$  (sau cu teorema celor trei perpendiculare)

Unghiul diedru cerut este așadar  $\widehat{PNE}$  ..... 2p

În  $\triangle DNE$  se obține  $NE = 15 \text{ cm}$ , iar în  $\triangle CEB$  se obține  $CE = 10\sqrt{3} \text{ cm} = PE$ .

$\triangle PEN: \operatorname{tg}(\widehat{PNE}) = \frac{PE}{NE} = \frac{10\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .....2p